أكاديمية ومدارس أجيال العلم

Science Generations Academy

التأسيس
الرياضيات المتقدم

إعداد المعلم: أحمد البشايرة

0799819016

توجيهي 2008

دفعة الطليعة

" مجموعات الأعداد "

أولاً: سوف نبدأ بدراسة مختصرة عن بعض مجموعات الأعداد من حيث المفهوم.

① الأعداد الصحيحة: هي الأعداد التي لا تحتوي على كسور ويرمز لها بالرمز "$\mathbb{Z}$"

مثل: $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \in \mathbb{Z}$ (تنتمي)

- نلاحظ من التعريف السابق للأعداد الصحيحة بأن:

$1.5 \notin \mathbb{Z}$ و $\frac{-2}{3} \notin \mathbb{Z}$

(كسر وليس عدد صحيح)

* احتوت على كسر وبالتالي ليست عدد صحيح (لا تنتمي الى مجموعة الأعداد الصحيحة)

② الأعداد النسبية (Q):

هي الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة $\frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$ ، $a,b \in \mathbb{Z}$

مثل: $\frac{1}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{-2}{5}, \frac{3}{4}, \dots \in Q$

أمكن كتابتها على صورة $\frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$ ، $0 \in Q \rightarrow 0 = \frac{0}{عدد}$

$2 \in Q \rightarrow 2 = \frac{2}{1} \rightarrow$ أمكن كتابتها على صورة $\frac{a}{b}$ ، $b \neq 0$

③ الأعداد الغير نسبية (I):

هي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة $\frac{a}{b}$ ؛ $(b \neq 0)$

مثل: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi, \dots$

حيث انها كسور عشرية غير منتهية وغير دورية مما يستحيل كتابتها على صورة $(\frac{a}{b})$.

④ الأعداد الحقيقية (R): هي مجموعة الأعداد التي تضم كل مجموعات الأعداد السابقة، ويرمز لها عادةً بالرمز R

$\sqrt{2}, 1.5, \frac{3}{4}, -1, 0, 1, \frac{-2}{3}, \dots \in R$

* من هنا يقودنا تعريف الأعداد الحقيقية الى دراسة بعض المواضيع المهمة المتعلقة بها بالتفصيل

* خط الأعداد:

* الفترات:

① $[a, b]$ ← الفترة المغلقة وتحوي كل الأعداد المحصورة بين a, b لما فيهم a و b

② (a, b) ← كل الأعداد المحصورة بين a و b باستثناء a, b وتسمى الفترة المفتوحة.

③ $[a, b)$ ← كل الأعداد ما بين a و b لما فيهم a ويستثنى من ذلك b وتسمى الفترة نصف المفتوحة أو النصف المغلقة.

④ $[a, b)$ ← كل الأعداد ما بين a, b ما فيهم b ويستثنى من ذلك a وتسمى كذلك الفترة النصف مفتوحة أو النصف مغلقة

ملاحظات:

① a , b يسميان أطراف الفترة.

② تكتب الفترة من العدد الأصغر إلى العدد الأكبر

المقادير المعرفة وغير المعرفة:

كل عدد معرف هو عدد حقيقي ؛ ويكون المقدار غير معرف في 3 حالات هي:

a. عندما يكون المقام يساوي صفر .

b. عندما يكون جذر زوجي وبداخله عدد سالب

c. (∞) ، كذلك $(-\infty)$ أعداد غير معرفة

* التوضيح :

a) $\frac{0}{0}$ ، $\frac{5}{0}$ ، $\frac{-2}{0}$ ، $\frac{1}{0}$ ، .....

• جميع المقادير غير معرفة لأن المقام يساوي صفر ، بما في ذلك $\frac{0}{0}$.

ملاحظة: $\frac{0}{\text{عدد}} = 0$ ، على سبيل المثال $\frac{0}{2} = 0$

b) $\sqrt[8]{1} = 1$ ، $\sqrt[4]{16} = 2$ ، $\sqrt{16} = 4$ ، $\sqrt{9} = 3$

$\sqrt[4]{-16}$ غير معرف

$\sqrt[8]{-1}$ غير معرف

* الجذور الفردية دائماً معرفة

$\sqrt[7]{-128} = -2$ ، $\sqrt[9]{-1} = -1$ ، $\sqrt[5]{32} = 2$

• ملاحظة:

$\sqrt{-x}$ بداخل الجذر الزوجي سالب ، ولكن لا يعني ذلك انه غير معرف لأن (x) متغير وليس عدد ثابت ،

عندما $x > 0$ يكون $\sqrt{-x}$ غير معرف

$x < 0$ يكون $\sqrt{-x}$ معرف

←

$5 , \frac{7}{2} , -4 , \frac{-2}{7} , \sqrt{5} , \sqrt[3]{-2} , 0.2 , -0.6 \in 2$

$\sqrt{-5} , \frac{6}{0} , \frac{0}{0} , \frac{-3}{0} , \infty , -\infty , \notin R$

* حل المعادلات باستخدام الجذور :

سؤال : جد حل المعادلات الآتية :

1) $x^2 = 16$

$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

2) $y^8 = 256$

$y = \pm\sqrt[8]{256} = \pm 2$

3) $x^3 = 8$

$x = \sqrt[3]{8} = 2$

4) $x^3 = -8$

$x = \sqrt[3]{-8} = -2$

5) $x^5 = -32$

$x = \sqrt[5]{-32} = -2$

6) $x^3 = -3$

$x = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$

* نلاحظ مما سبق بأنه عند حل معادلة إذا كان الأس زوجي في حالة المساواة مع عدد موجب فإنه يوجد حلين للمعادلة ، وإذا كان الأس فردي فإنه يوجد حل واحد .

* قوانين الأسس :

x^n ← n الأس وهو عدد مرات ضرب الأساس في نفسه .
← x الأساس

1) الأسس عند الضرب تجمع بشرط تساوي الأساسات .

$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

1) $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$

2) $x^6 \cdot x^{-3} = x^{6+(-3)} = x^{6-3} = x^3$

2) الأسس عند القسمة تطرح بشرط تساوي الأساسات .

$\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

1) $\dfrac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$

2) $\dfrac{x^6}{x} = x^{6-1} = x^5$

3) $\dfrac{x^{b+5}}{x^5} = x^{b+\cancel{5}-\cancel{5}} = x^b$

4) $\dfrac{x^{a+1}}{x} = x^{a+\cancel{1}-\cancel{1}} = x^a$

3) $x^0 = 1$

1) $2^0 = 1$ 2) $3^0 = 1$ 3) $100^0 = 1$

4) $-10^0 = 1$

4) $x \neq 0 \quad : x^{-1} = \frac{1}{x}$

1) $(2)^{-1} = \frac{1}{2}$ 2) $(1)^{-1} = \frac{1}{1} = 1$

3) $(2)^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

5) $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

1) $\sqrt{x^2} = x^{2/2} = x$

2) $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2$

3) $\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$

6) $(x^n)^m = x^{(n \times m)}$

1) $(x^2)^3 = x^{2\times3} = x^6$

2) $(x^6)^2 = x^{12}$

3) $(x^{-2})^3 = x^{-2\times3} = x^{-6} = \frac{1}{x^6}$

7) $y \neq 0 \; ; \; \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

1) $\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$

2) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$

8) $(xy)^n = x^n y^n$

1) $(xy)^2 = x^2y^2$

2) $(xy)^{-5} = \frac{1}{(xy)^5} = \frac{1}{x^5y^5}$

3) $(xy)^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{(xy)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$

$= \frac{1}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}}$

* العمليات على العبارات الجبرية :
- العبارة الجبرية : هي جملة رياضية تتكون من متغيرات وثوابت .

1) x^2+2
2) $x^2+2x+3+w$
3) $x-2+y$

متغير (x)، ثابت (2)

* سنتعلم الآن عزيزي الطالب العمليات على العبارات الجبرية .

1) جمع العبارات الجبرية وطرحها .

* يكون جمع العبارات الجبرية وطرحها بجمع وطرح الحدود المتشابهة فقط .

* الحدود المتشابهة : هي الحدود التي تتشابه في المتغير وقوة المتغير .

مثل :

1) $x^2 \pm x^2$

حدين متشابهين لتشابه المتغيرات والقوى .

2) $x^2 + x \rightarrow$ حدين غير متشابهين برغم تشابه المتغير إلا أن القوى غير متشابهة

3) $x + y \rightarrow$ حدين غير متشابهين وذلك لعدم تشابه المتغيرات .

4) $xy + y \rightarrow$ حدين مختلفين

* الذي يفصل بين الحدود فقط الجمع والطرح

1) $x + y \rightarrow$ حدين

حد حد

2) $xyz + y^2 \rightarrow$ حدين

حد حد

سؤال : أكتب العبارات الجبرية الآتية في أبسط صورة:

1) $2x^2 + x^2 = 3x^2 \rightarrow$

$(2+1)x^2 = 3x^2$

الحدين متشابهين لذلك نقوم بجمع المعاملات .

2) $3x^3 + 5x^3 = (3+5)x^3 = 8x^3$

الحدين متشابهين لذلك نقوم بجمع المعاملات

3) $2y^2 + x^3 = 2y^2 + x^3$

أبسط صورة وذلك لاختلاف الحدود حيث لا يمكننا جمع أو طرح الحدود المختلفة (الغير متشابهة) .

4) $2x^3 + x = 2x^3 + x$

5) $4x^2 - x^2 = (4-1)x^2 = 3x^2$

الحدين متشابهين لذلك نقوم بطرح المعاملات

6) $x - 5x = (1-5)x = -4x$

الحدين متشابهين لذلك نقوم بطرح المعاملات

7) $-3x^4 - 5x^4 = (-3-5)x^4 = -8x^4$

8) $3x - 5x^3 + 6x + 7x^3 + y$

$9x$

حدين متشابهين $(2x^3)$

لا يوجد حد يشابه y فنضعه في الناتج كما هو

$= 9x + 2x^3 + y$

9) $$\underbrace{2x + \overbrace{3 + 4x + 5}^{3+5=8}}_{(2+4)x\ =6x} = 6x + 8$$

10) $$2y - 3 - 5 - y = y - 8$$
$$\underbrace{2y - y}$$
$$(2-1)y = y$$

11) $$\cancel{x} + 2y + 3 - \cancel{x} = 2y + 3$$
$$\underbrace{x - x}_{0}$$

* ضرب العبارات الجبرية:

أولاً: الأسس في حالة الضرب تجمع بشرط تشابه الأساسات.

ثانياً: المعاملات تضرب ببعضها

مثال:

1) $(2x)(3x^2) = 6x^3 \rightarrow (2\times3)x^{1+2} = 6x^3$

2) $(-5x^2)(2x^3) = (-5\times2)x^{2+3} = -10x^5$

3) $(-6xy)(-3x^2) = 18x^3y$

4) $(-2xy)(-6x^3y^4) = 12x^4y^5$

5) $(2xyz)(-x) = -2x^2yz$

* ملخص الأقواس:

نستخدم خاصية توزيع الضرب على الجمع والطرح.

مثال:

1) $2x(x-3) = 2x\cdot x - 2x\cdot 3$
$= 2x^2 - 6x$

2) $x^2(x^3 - 5x) = x^2\cdot x^3 - 5x\cdot x^2$
$= x^5 - 5x^3$

3) $(x-3)(x+2)$
$= x^2 + \underbrace{2x - 3x}_{-x} - 6$

بتجميع الحدود المتشابهة ينتج

$x^2 - x - 6$

4) $(x^2 + 3x)(x - 2)$
$= x^3 - 2x^2 + 3x^2 - 6x$

بتجميع الحدود المتشابهة

$x^3 + x^2 - 6x$

* الكسور :

أولاً : جمع الكسور وطرحها :

عند جمع الكسور وطرحها يجب ان تكون المقامات متساوية فإن لم تكن كذلك وجب علينا أن نجعلها متساوية لما يسمى توحيد المقامات .

على سبيل المثال :

1) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}=1$

نلاحظ في هذا المثال بأن المقامات متساوية ومتساوي (3)

2) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

نلاحظ هنا بأن المقامين مختلفين لذلك لا نستطيع جمع الكسرين الا اذا وحدنا المقامات .

$\xrightarrow[\text{المقامات}]{\text{توحيد}}$ $\frac{2*2}{2*3}+\frac{1*3}{2*3}=\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4+3}{6}$

$=\frac{7}{6}$

الأمثلة :

1) $\frac{1}{3}+\frac{5}{6}$

نلاحظ هنا أنه يوجد عامل مشترك بين المقامين غير (1) وعندها نستطيع توحيد المقامات كالتالي :

$\frac{2*1}{2*3}+\frac{5}{6}=\frac{2}{6}+\frac{5}{6}=\frac{7}{6}$

← أصبحت المقامات متساوية .

2) $\frac{2}{10}-\frac{5}{2}$

$\frac{2}{10}-\frac{5*5}{2*5}=\frac{2}{10}-\frac{25}{10}$

أصبحت المقامات متساوية ومن هنا نستطيع طرح البسطين لتصبح كالتالي :

$\frac{2-25}{10}=\frac{-23}{10}$

3) $\frac{3}{5}+\frac{3}{7}$

نلاحظ هنا بأن المقامات مختلفة ولا يوجد بينهما أي عوامل مشتركة غير (1) وبهذه الحالة نوحد المقامات كالتالي :

$\frac{7*3}{7*5}+\frac{3*5}{7*5}=\frac{21}{35}+\frac{15}{35}$

← أصبحت المقامات متساوية والآن نستطيع أن نجمع كالتالي :

$\frac{21+15}{35}=\frac{36}{35}$

* ضرب الكسور وقسمتها:

1) $\frac{X}{y} \times \frac{Z}{W} = \frac{X * Z}{y * W} = \frac{XZ}{yW}$

← نضرب البسط في البسط والمقام في المقام ولسنا مضطرين بأن تكون المقامات متساوية.

2) $\frac{X}{y} \div \frac{Z}{W}$

$= \frac{X}{y} \times \frac{W}{Z} = \frac{XW}{yZ}$

* نحول القسمة إلى ضرب ونقلب ما بعد القسمة

* الأمثلة:

1) $\frac{3}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{3*6}{5*7} = \frac{18}{35}$

2) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2*1}{3*2} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$

بالتبسيط نقسم البسط والمقام على (2)

3) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{1*4}{2*3} = \frac{4 \div 2}{6 \div 2} = \frac{2}{3}$

4) $\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} * \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$

← نلاحظ بأن الكسر مكتوب في أبسط صورة ولن نستطيع تبسيطه أكثر من هذا!

* ملاحظة: مادرسناه عزيزي الطالب من عمليات على الكسور التي تتضمن أعداد ثابتة يمكننا دراسته أيضاً في الكسور التي تحتوي مقادير جبرية وإليك الأمثلة التي توضح ذلك:

الأمثلة:

1) $\frac{2}{X} + \frac{3}{X+1}$

ملاحظة: المقامات غير متساوية يجب علينا توحيد المقامات كالتالي:

$\rightarrow \frac{2(X+1)}{X(X+1)} + \frac{(3*X)}{(X+1)*X}$

$= \frac{2(X+1)}{X(X+1)} + \frac{3X}{X(X+1)}$

أصبحت المقامات متساوية وتساوي $X(X+1)$

$\frac{2(X+1)}{X(X+1)} + \frac{3X}{X(X+1)} = \frac{2(X+1)+3X}{X(X+1)}$

الآن نستطيع تبسيط المقدار أكثر كالتالي

$\frac{2(X+1)+3X}{X(X+1)} = \frac{2X+2+3X}{X(X+1)} = \frac{5X+2}{X(X+1)}$

$$2)\ \frac{x}{x^2+1} - \frac{3x}{x-1}$$

$$= \frac{x(x-1)}{(x^2+1)(x-1)} - \frac{3x(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x(x-1) - 3x(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - x - 3x^3 - 3x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-3x^3 + x^2 - 4x}{(x^2+1)(x-1)}$$

* ورقة عمل *

السؤال الأول: أكتب المقادير الجبرية التالية في أبسط صورة:

$1)\ (x+2)(2x^2-3)$

$2)\ (x+1) - 2x$

$3)\ \frac{3x^2}{x^3}$

$4)\ (x+2)+(2x-5)$

السؤال الثاني: جد ناتج كل مما يلي في أبسط صورة:

1) $\frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{x-1} =$

2) $\frac{3x^2}{x+1} + \frac{2x}{x+2}$

3) $\frac{5x^2}{x-1} - \frac{3x}{x^2+2}$

4) $\frac{x}{\frac{x}{3}}$

5) $(x+2) \div \frac{1}{x}$

* تحليل المقادير الجبرية

١) الفرق بين مربعين

← أي طرح بين حدين مربعين

← العدد المربع : المربع الكامل وهو العدد الناتج عند ضرب عدد في نفسه مثل

$2*2=4$ / $3*3=9$ / $x*x=x^2$

$y^3 * y^3 = y^6$ و $\sqrt{y} * \sqrt{y} = y$

* أمثلة متنوعة على تحليل العبارات باستخدام الفرق بين مربعين .

1) $y^2-16=(y-4)(y+4)$

2) $4x^2-9=(2x-3)(2x+3)$

3) $y^2-1=(y-1)(y+1)$

4) $9y^2-144=(3y-12)(3y+12)$

5) $(x+2)^2-64=((x+2)-8)((x+2)+8)$

$=(x+2-8)(x+2+8)$

$=(x-6)(x+10)$

6) $9x^2-81y^2=(3x-9y)(3x+9y)$

* ملاحظة: لا يوجد تحليل مجموع مربعين

$x^2+9 \rightarrow$ لا تتحلل

* التحليل باستخدام الفرق ومجموع مكعبين

← العدد المكعب : هو حاصل ضرب العدد في نفسه (3) مرات .

← القاعدة العامة لتحليل الفرق بين مكعبين

$(x^3-y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

← القاعدة العامة لتحليل مجموع مكعبين

$(x^3+y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

← أمثلة متنوعة

1) $(x^3-1)=(x-1)(x^2+x+1)$

2) $(27y^3-8)=(3y-2)(9y^2+6y+4)$

3) $(\frac{1}{8}y^3-\frac{1}{27})=(\frac{1}{2}y-\frac{1}{3})(\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{6}y+\frac{1}{9})$

4) $(27x^3+8)=(3x+2)(9x^2-6x+4)$

5) $(a^3y^3+b^3)$

$=(ay+b)(a^2y^2-aby+b^2)$

← الأمثلة: حلل ما يلي:

1) x^2+4x+3

$$\overbrace{(x+1)\;(x+3)}^{3x}$$
$$\underbrace{1\;\;\;\;\;\;x}_{1x}$$

← للتأكد: $x+3x=4x$

الحد الثاني (الأوسط)

التحليل صحيح.

2) $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

3) $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$

4) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

5) $x^4-(7x^2-10)$

← في المثال الخامس أس x في الحد الأول هو ضعف أس x في الحد الثاني ← نستطيع تطبيق ما سبق من تحليل العبارة التربيعية

الحل: نفرض أن $x^2=y$ ← $x^4=y^2$

نتربيع الطرفين

→ $x^4-7x^2+10=y^2-7y+10$

→ $(y-2)(y-5)$

→ $(x^2-2)(x^2-5)$

6) $(x+y)$

$(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})((\sqrt[3]{x})^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2)$

7) $(64y^3-\frac{8}{125})$

$=(4y-\frac{2}{5})(16y^2+\frac{8}{5}y+\frac{4}{25})$

* تحليل العبارة التربيعية:

أولاً: الصيغة العامة للعبارة التربيعية:

ax^2+bx+c

a: معامل x^2

b: معامل x

c: الحد الثابت

← نفتح قوسين مضروبات في بعض ونضع x في كل منهما $(x)(x)$ وهو تحليل x^2 الحد الأول.

← نبحث عن عددين حاصل ضربهما الحد الثابت (c) ومجموعهما يساوي معامل (b) الحد الأوسط.

* التحليل باستخدام العامل المشترك

ملاحظة: يجب أن تكون العبارة من حدين على الأقل حتى نتمكن من استخدام العامل المشترك.

← الأمثلة

فرق بين مربعين

1) $2x^2-10=2(x^2-5)$

$=2(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

2) $5x-25=5(x-5)$

مجموع مكعبين

3) $3x^3+9=3(x^3+3)$

$=3(x+\sqrt[3]{3})(x^2-\sqrt[3]{3}x+(\sqrt[3]{3})^2)$

4) $x^3-25x=x(x^2-25)$

$=x(x-5)(x+5)$

5) $81x^4-3x=3x(27x^3-1)$

$=3x(3x-1)(9x^2+3x+1)$

↓ عبارة تربيعية لا تتحلل.

← للتذكير

مميز العبارة التربيعية هو:

b^2-4ac

$\rightarrow b^2-4ac\geq 0$ تتحلل

$b^2-4ac<0$ لا تتحلل

6) $2x^2+5x+2$

$(2x+1)(x+2)$ — $4x$ ، x

$\rightarrow x+4x=5x$

7) $3x^2+8x+5=(3x+5)(x+1)$ — $3x$ ، $5x$

$=3x+5x=8x$

8) $2x^2+5x-3=(2x-1)(x+3)$

** تحذير **

خطأ شائع عند بعض الطلاب وهو عدم مراعاة الإشارة

على سبيل المثال:

$(2x+3)(x-1)$ — $-2x$ ، $3x$

$3x-2x=x\neq 5x$

← التحليل خاطئ.

9) $5(x+1)^2-44(x+1)-9$

← الحل: نفرض أن:

$y=x+1$

$\rightarrow 5y^2-44y-9$

$(5y+1)(y-9)$

$\rightarrow (5(x+1)+1)((x+1)-9)$

$=(5x+5+1)(x+1-9)$

$=(5x+6)(x-8)$

→ $(3)^2-4(9)(1)$

→ $9-36=-27<0$

6) $x^4-3x^2=x^2(x^2-3)$

$=x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

7) $x^4+3x^2=x^2(x^2+3)$

← لا يوجد تحليل مجموع مربعين

8) x^3-9x^2+18x ← يجب ان يكون العامل المشترك مشتركاً بين الـ 3 حدود

$\underbrace{x(x^2-9x+18)}=x(x-3)(x-6)$

↓

عبارة تربيعية مميزها أكبر من صفر

9) $\underbrace{x^3(x-2)}_{\text{الحد الاول}}+\underbrace{(x-2)}_{\text{الحد الثاني}}$

$(x-2)\underbrace{(x^3+1)}_{\text{مجموع مكعبين}}=(x-2)(x+1)(x^2-x+1)$

↓

$(1)^2-4(1)(1)=-3<0$

10) $x-\sqrt{x}=x-x^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}-1)$

$=\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$

11) $3x-1=3(x-\frac{1}{3})$

← قد لا يكون هناك عامل مشترك بين الحدود ولكن نحتاج في بعض الأسئلة أن نفترض عامل مشترك.

* تحليل مقدار جبري من الدرجة الثالثة فأكثر:

مثال: حلل المقادير الجبرية التالية الى العوامل الأولية:

① x^3+x^2-2

أولاً: نجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.

1) عوامل الحد الثابت (-2) هي: ± 2 و ± 1

2) عوامل المعامل الرئيس (1) ← 1

∴ الأصفار النسبية هي:

$\pm \frac{\text{عوامل الحد الثابت}}{\text{عوامل المعامل الرئيس}} = \pm 2$ و ∓ 1

← الآن بالتجريب:

a) $x=1 \rightarrow (1)^3+(1)^2-2$

$=2-2=0$

بالتالي $x=1$ هو جذر للمقدار

وبالتالي $(x-1)$ أحد العوامل:

← الآن سوف نذهب الى القسمة الطويلة:

أولاً: نرتب كل من المقسوم والمقسوم عليه حسب قوى x.

ثانياً: قسمة الحد الأعلى من المقسوم على الحد الأعلى من المقسوم عليه.

ثالثاً: ضرب الناتج في المقسوم عليه.

رابعاً: نعكس الإشارات ونجمع.

خامساً: تكرار نفس الخطوات.

← التطبيق:

الناتج ← x^2+2x+2

المقسوم عليه ← $x-1$

المقسوم ← $\cancel{x^3}+x^2-2$

$$
\begin{array}{r}
x^2+2x+2 \\
x-1 \;\big)\; \cancel{x^3}+x^2-2 \\
\mp x^3 \pm x^2 \qquad \\
\hline
2x^2-2 \\
\mp 2x^2 \pm 2x \\
\hline
2x-2 \\
\pm 2x \pm 2 \\
\hline
\text{Zero}
\end{array}
$$

الباقي صفر ← Zero

نلاحظ أن:

$$x^3+x^2-2=\underbrace{(x^2+2x+2)}_{\downarrow}(x-1)$$

نحللها إذا كان المميز أكبر من صفر

* المميز b^2-4ac

$4-8=-4<0$

∴ لا تتحلل

② $2x^3+2x=-3x^2-1$

$\rightarrow 2x^3+2x+3x^2+1=0$

بإعادة الترتيب حسب قوى x

$2x^3+3x^2+2x+1=0$

* الحد الثابت (1) ← عوامل الحد الثابت (1)
* المعامل الرئيس (2) ← عوامل المعامل الرئيس (1) و (2).

ملاحظة: المعامل الرئيس هو معامل المتغير الأكبر من حيث القوة.

∴ الأصفار النسبية هي: $\pm\frac{1}{2}$ ، ± 1

الآن:

1) $x=1 \rightarrow 2(1)^3+3(1)^2+2(1)+1=8$

2) $x=-1 \rightarrow 2(-1)^3+3(-1)^2+2(-1)+1$
$= -2+3-2+1$
$=0$

∴ $x=-1$ جذر للمعادلة وبالتالي:

$(x+1)$ هو أحد العوامل

⟵ إلى القسمة الطويلة

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2+x+1 \\
\hline
x+1 & 2x^3+3x^2+2x+1 \\
 & \mp 2x^3 \mp 2x^2 \\
\hline
 & x^2+2x \\
 & \mp x^2 \mp x \\
\hline
 & x+1 \\
 & \mp x \mp 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

الناتج : $2x^2+x+1$

الباقي : 0

$\therefore$ $2x^3+3x^2+2x+1 = (2x^2+x+1)(x+1)$

نحلل العبارة التربيعية اذا كان المميز >0

⇐ المميز : b^2-4ac

$= (1)^2-4(2)(1)$

$= 1-8 = -7 < 0$

$\therefore$ العبارة التربيعية لا تتحلل

$$\underbrace{2x^3+3x^2+2x+1}_{\text{المقسوم}} = \underbrace{(2x^2+x+1)}_{\text{الناتج}}\ \underbrace{(x+1)}_{\text{المقسوم عليه}}$$

* تمرين : حلل المقدار :

x^4+3x^3-4

* ورقة عمل ________ :

حلل ما يلي إلى العوامل الأولية

1) $9y^2 - 144$

2) $(y+3)^2 - 144$

3) $64y^3 - \frac{8}{125}$

4) $(3x+2)^3 - (x+1)^3$

5) $y + 27$

6) $x^2 - 4x - 12$

7) $x^4 + 2x^2 - 15$

8) $x^6 + 2x^3 - 15$

9) $x - 10\sqrt{x} + 16$

10) $3x^2+8x+5$

11) $(x+1)^2-3(x+1)-4$

12) $9x^2+3x+1$

13) x^8-4x^2

14) $4x^3-5x^2-9x$

15) $2x^4+250x$

16) $4x-3$

17) $8x^3 + x^2 - \frac{5}{4}$

* اقترانات كثير الحدود :

يسمى $f(x)$ إقتران كثير حدود إذا كان على صورة :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث :

$a_n , a_{n-1} , \dots , a_1 , a_0 \in \mathbb{R}$

$n , n-1 , \dots , 1 , 0 \in \mathbb{Z}$ (غير السالبة)

* تكون تسمية كثير الحدود بناء على درجته (أعلى قوة) ، ومن الأمثلة على كثيرات الحدود:

1) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$

← كثير حدود من الدرجة الثالثة لأن أكبر قوة في الاقتران هي (3) ← تكعيبي)

2) $f(x) = x^2 + 1$

← كثير حدود من الدرجة الثانية (تربيعي)

3) $f(x) = \frac{2}{3}x - 2$

← كثير حدود من الدرجة الأولى (خطي) .

4) $f(x) = 2$

← كثير حدود من الدرجة الصفرية (ثابت)

لأن $f(x) = 2x^0 = 2(1) = 2$

* ومن الأمثلة على اقترانات ليست كثيرات حدود :

1) $f(x) = 2x^{-3} + x - 5$

نلاحظ هنا أن $-3 \notin \mathbb{Z}^+$

(الأس عدد صحيح سالب) .

2) $f(x) = 4x^{\frac{5}{8}} - x^2$

الأس كسر وليس صحيح .

3) $f(x) = \sqrt{x} - 1$

$\rightarrow \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ الأس كسر

4) $f(x) = \frac{3x+3}{x^2-5} \rightarrow$ اقتران نسبي

5) $f(x) = \begin{cases} x , & x \geq 1 \\ x^2 - 3 , & x < 1 \end{cases} \rightarrow$ اقتران متشعب

ملاحظة : ١- الاقترانات المثلثية والأسية واللوغاريتمية ليست كثيرات حدود .

٢- الصورة العامة لبعض اقترانات كثيرات الحدود .

a) $f(x) = c \rightarrow$ ثابت

b) $f(x) = ax + b \rightarrow$ خطي

c) $f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow$ تربيعي

$a \neq 0$

٣- يسمى الإقتران $f(x)$ اقتران نسبي إذا كانت كل من البسط والمقام كثيرات حدود ، ومن الأمثلة عليه :

1) $\frac{3x+4}{x^2-5}$ اقتران نسبي حيث ان البسط كثير حدود وكذلك المقام ايضاً كثير حدود.

2) $\frac{x^2-5}{x+3}$ اقتران نسبي

3) $\frac{2}{x+3}$ اقتران نسبي

4) $\frac{\sqrt{x}+5}{2x^2+3}$ ليس اقتران نسبي لأن البسط ليس كثير حدود ويسمى هذا الاقتران ، اقتران كسري

" ورقة عمل "

سؤال : تأمل الاقترانات التالية ثم اجب عن الأسئلة التي تليها :

1) $f(x) = 2x^3 + 3x + 5$

2) $g(x) = 2x^2$

3) $h(x)\ \frac{\sqrt{x}-1}{2x+3}$

4) $c(x)\ \frac{x^2-3}{x^3+5x}$

5) $d(x) = \begin{cases} 2x-4, & x>0 \\ x-1, & x\leq 0 \end{cases}$

6) $w(x) = 6$

7) $j(x) = 2x+3$

a) أي من الاقترانات السابقة تعتبر كثير حدود وأيها غير ذلك ؟

b) إذا كان الإقتران كثير حدود اذكر نوعه ؟

c) إن لم يكن الإقتران كثير حدود فما هو نوعه ؟

" حل المعادلات "

أولاً : المعادلة هي عبارة عن جملة رياضية تتكون من متغيرات وثوابت ومساواة، مثل

$2x+5=3$ ، $3x^2-2x=3x+2$ ، ..

ثانياً: حل المعادلة هو ايجاد قيمة ذلك المتغير فمن الممكن ان يكون للمتغير أكثر من قيمة وذلك حسب المعادلة.

ثالثاً: من الممكن ان يكون للمعادلة أكثر من متغير وبالتالي سنحتاج الى أكثر من معادلة لإيجاد قيم هذه المتغيرات وتسمى هذا النوع بالنظام، مثل:

$$\begin{aligned} 3x+y &= 2 \\ 3x-y &= 3 \end{aligned}$$

نظام يتكون من معادلتين خطيتين

← تسمى عملية ايجاد قيم هذه المتغيرات حل النظام.

← الآن سوف نبدأ بتعلم حل العديد من المعادلات:

١) المعادلة الخطية

1) $2x+2=3$ (-2)

← سوف نجعل المجاهيل في طرف والثوابت في طرف آخر مع مراعاة تغيير الاشارة عند الانتقال من طرف لآخر

$\rightarrow 2x = 3-2$

$\frac{2x}{2} = \frac{1}{2}$ ← نقسم طرفي المعادلة على (2)

$\therefore\ x = \frac{1}{2}$

2) $x-2=3$ ($+2$)

$\rightarrow x = 3+2 = 5$

3) $\underbrace{x+2x}_{3x} = 3x-4$

$\rightarrow 3x = 3x - 4$

$3x - 3x = -4$

$0 = -4$ ✗

← لا يوجد حل لأنه لا يمكن

$0 = -4$ $\quad 0 \neq -4$

* المعادلة التربيعية

1) $x^2 - 2x - 3 = 0$

← بداية نحل المعادلة التربيعية كما تعلمنا سابقاً من تحليل العبارة التربيعية كالتالي:

$\rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

← إما $x-3=0$

أو $x+1=0$

* $x-3=0 \rightarrow x=3$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

∴ يوجد حلان للمعادلة وهما:

$x = \{-1, 3\}$

← حل آخر: يمكننا استخدام القانون العام في حل المعادلة التربيعية :

$$x = \frac{-b \pm \overbrace{\sqrt{b^2-4ac}}^{\text{المميز}}}{2a}$$

حيث :

a: معامل x^2

b: معامل x

c: الحد الثابت

$\rightarrow a=1 \ , \ b=-2 \ , \ c=-3$

$\rightarrow x_1 = \dfrac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2(1)}$

$\rightarrow x_2 = \dfrac{-(-2)-\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2(1)}$

$\therefore x_1 = \dfrac{2+\sqrt{16}}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$

$x_2 = \dfrac{2-\sqrt{16}}{2} = \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1$

$\therefore x = \{-1, 3\}$

2) $x^2+5x+6=0$

$(x+2)(x+3)=0$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$

$x+3=0 \rightarrow x=-3$

$\therefore x = \{-3, -2\}$

3) $3x^2+7x+2=0$

* نلاحظ هنا بأن المعادلة التربيعية غير بسيطة (معامل x^2 ليس (1))

طريقة (1): الطريقة التقليدية كما تعلمنا سابقاً وهي نفس طريقة تحليل المعادلة التربيعية البسيطة.

$$\overbrace{(3x+1)\underbrace{)\ (x}_{x}+2)}^{6x}=0$$

$\rightarrow 6x + x = 7x$ ✓ الحد الاوسط

$\rightarrow 3x+1=0 \rightarrow x = \frac{-1}{3}$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$

$\therefore$ مجموعة الحل : $-2 \ , \ -\frac{1}{3}$

طريقة (2): باستخدام القانون العام طبقها ذاتياً :

4) $9x^2+3x+1=0$

أولاً: نجد المميز:

$\Delta=b^2-4ac$

$\to \Delta=(3)^2-4(9)(1)$

$=9-36=-27<0$

∴ المعادلة لا تتحلل وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة .

5) $(x-2)^2=0$

طريقة (1):

$(x-2)^2=x^2-4x+4=0$

$\to (x-2)(x-2)=0$

$x-2=0 \to x=2$

$x-2=0 \to x=2$

$\therefore x=\{2,2\}$

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

خطأ شائع:

$(a\pm b)^2=a^2\pm b^2$ ✗

$(a\pm b)^2\neq a^2\pm b^2$

طريقة (2):

$(x-2)^2=0$

$\to (x-2)(x-2)=0$

$\to x-2=0 \to x=2$

$x-2=0 \to x=2$

$x=\{2,2\}$

6) $2x^2+5x=-2$ ($+2$)

$\to 2x^2+5x+2=0$

$\to (2x+1)(x+2)=0$

$4x$, x $\to 4x+x=5x$ ✓

$2x+1=0 \to x=-\frac{1}{2}$

$x+2=0 \to x=-2$

$\therefore x=\{-2,-\frac{1}{2}\}$

* حل أنظمة المعادلات بالحذف والتعويض

1) $2x+3y=13$ ...... (1)

$x=7-2y$ ...... (2)

الحل: سنستخدم التعويض في حل النظام:

$\to 2(\underbrace{7-2y}_{})+3y=13$ ..... (1)

قيمة x الموجودة في المعادلة الثانية

$\to 14-4y+3y=13$

$14-y=13$

$\therefore 14-13=y$ $\quad \therefore y=1$

الآن عوض قيمة y المستخرجة في المعادلة (2)

$\rightarrow x = 7 - 2(1) = 7 - 2 = 5$

$x = 5$

2) $3x + 3 = 3y$ .... ①
$2x - 6y = 2$ .... ②

أولاً: سنعيد ترتيب المعادلة الأولى.

$3x - 3y = -3$ .... ①
$2x - 6y = 2$ .... ②

ثانياً: أضرب المعادلة ① في (-2)

$(3x - 3y = -3) * -2$

$\rightarrow -6x + 6y = 6$ .... ①
$2x - 6y = 2$ .... ②

ثالثاً: إجمع المعادلة ② + ① ∴

$-4x = 8$

الآن نقسم طرفي المعادلة على (-4)

$\frac{-4x}{-4} = \frac{8}{-4}$ ∴ $x = -2$

رابعاً: عوض قيمة x الناتجة في اي من المعادلتين للحصول على قيمة y :

$\rightarrow 3(-2) + 3 = 3y$ .... ①

$-6 + 3 = 3y \rightarrow \frac{-3}{3} = \frac{3}{3}y$

$\therefore y = -1$

∴ حل النظام:
$x, y = \{-2, -1\}$

3) $2x^2 + 3y^2 = 11$ .... ①
$7x^2 - 2y^2 = 26$ .... ②

* اضرب المعادلة (1) في العدد (2)
واضرب المعادلة (2) في العدد (3)

$4x^2 + 6y^2 = 22$ .... ①
$21x^2 - 6y^2 = 78$ .... ②

بجمع المعادلتين ينتج أن :

$\frac{25x^2}{25} = \frac{100}{25}$

$\therefore x^2 = 4$
$\therefore x = \pm 2$

الآن نعوض في المعادلة (1) :

$x = 2$
$\rightarrow 2(2)^2 + 3y^2 = 11$
$8 + 3y^2 = 11$

$3y^2 = 3$

$\therefore y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$

ملاحظة: في حال تعويض $x = -2$
لن تتغير قيمة y لأن
$(-2)^2 = 4$

$\therefore$ مجموعة الحل:

$(2,1), (-2,1), (2,-1), (-2,-1)$

$4)\ x - y = 3 \quad \text{------} \quad ①$

$x^2 + y^2 = 29 \quad \text{------} \quad ②$

الحل ← من المعادلة الخطية $x - y = 3$

$\leftarrow \quad x = 3 + y$

الآن نعوض في المعادلة (2) كالتالي:

$(3+y)^2 + y^2 = 29 \quad \text{------} \quad ②$

$\rightarrow (3)^2 + 2 * 3 * y + y^2 + y^2 = 29$

$9 + 6y + 2y^2 = 29$

$9 + 6y + 2y^2 - 29 = 0$

معادلة تربيعية ← $2y^2 + 6y - 20 = 0$

* نقسم المعادلة على العدد (2):

$y^2 + 3y - 10 = 0$

$(y+5)(y-2) = 0$

$\therefore y = -5, 2$

* الآن نعوض في المعادلة الخطية
إجابتي:

عندما $y = -5 \rightarrow x = 3 + (-5) = -2$

عندما $y = 2 \rightarrow x = 3 + 2 = 5$

$\therefore$ مجموعة الحل:

$(-2, -5)\ (5, 2)$

"ورقة عمل"

سؤال (1): حل كل من المعادلات التالية:

$1)\ x - 2 = 3$

$2)\ x + 4 = 2x - 3$

$3)\ 2x^2 + 5x - 3 = 0$

4) $x^2 + x - 6 = 0$

5) $(x-4)^2 = 2$

السؤال الثاني: حل كل نظام من أنظمة المعادلات التالية:

1) $y + 3x = -5$
$y = -11 - 6x$

2) $5x - 3y = 18$
$-2x + 2y = -8$

3) $2x + 3y = 13$
$x + 2y = 7$

4) $2x - y = -4$
$2x^2 + 3xy - y^2 = -8$

5) $x^2 + y^2 = 13$
$x^2 - y = 7$

* الاقترانات المثلثية :

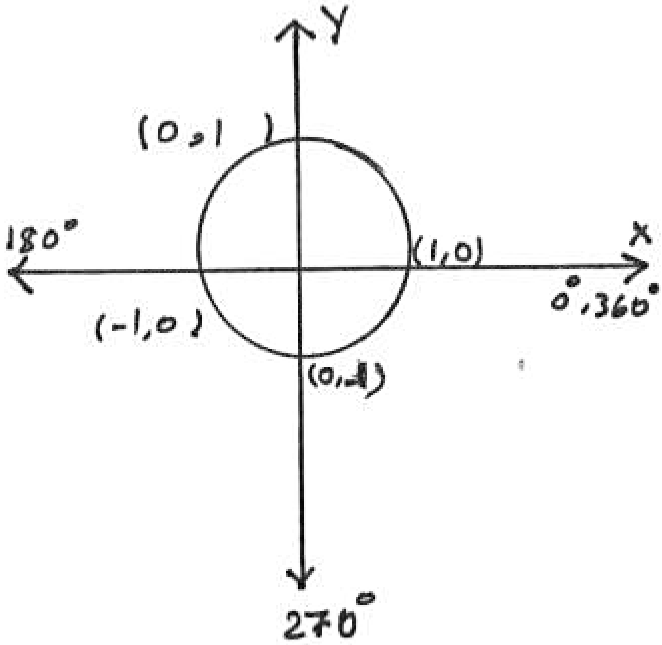
① يتم حفظ جدول زوايا المرجع: $30°, 45°, 60°$

X	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$
$\sin X$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos X$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan X$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

② زوايا الحادود:

$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

هذه الزوايا يتم حفظها من دائرة الوحدة
حيث كل زوج يمثل (cos , sin)



لاحظ ان: $\sin(90°) = 1$ / $\cos(90°) = 0$
$\sin(\pi) = 0$ / $\cos(\pi) = -1$

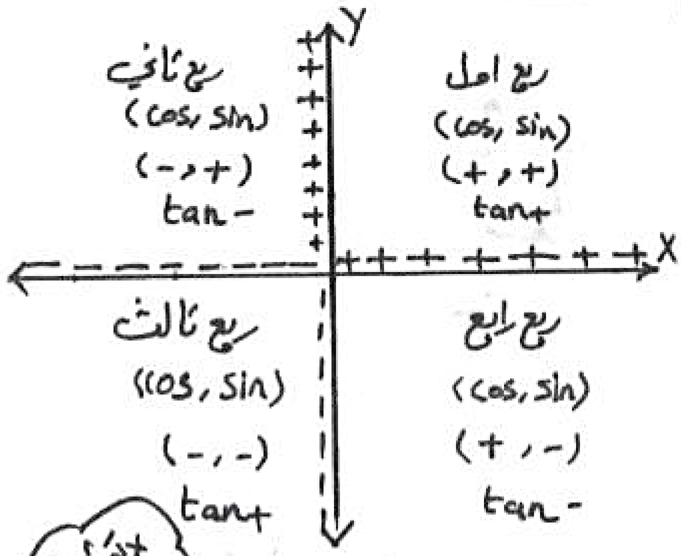
* ملاحظة: لتحويل الزاوية من درجات الى راديان: نضرب بـ $\left(\frac{\pi}{180°}\right)$

مثال: $120° = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$

وللتحويل الزاوية من راديان الى درجات نعوض $\pi = 180°$

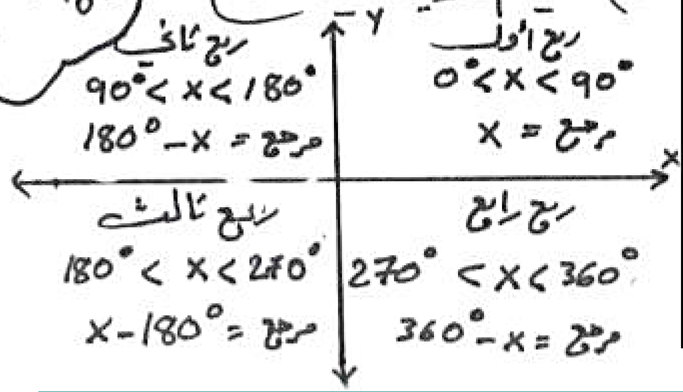
مثال: $\frac{4\pi}{3} = \frac{4(180)}{3} = 240°$

3) إشارة الاقترانات المثلثية في الأرباع الأربعة



*افصل الزاوية المعطاة

4) معرفة الزاوية في الأرباع



5) لإيجاد قيمة الاقترانات المثلثية :

مثال: جد قيمة كل مما يلي :

1) $\cos(120^\circ)$

نحدد الربع حيث 120° تقع في الربع الثاني وبالتالي تكون اشارة $\cos$ سالبة، ثم نجد زاوية المرجع حيث :

$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ =$ مرجع

$\cos(120^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\frac{1}{2}$

2) $\sin(135^\circ) = \sin(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ربع ثاني

$180^\circ - 135^\circ = 45^\circ =$ مرجع

3) $\cos(225^\circ) = -\cos(45^\circ)$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ربع ثالث

$225^\circ - 180^\circ = 45^\circ =$ مرجع

4) $\tan(210^\circ) = \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ربع ثالث

$210^\circ - 180^\circ = 30^\circ =$ مرجع

5) $\sin(300^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ربع رابع

$360^\circ - 300^\circ = 60^\circ =$ مرجع

6) $\sin(450^\circ)$

* ملاحظة: اذا زادت الزاوية عن 360° نقوم لطرح دورة (360)

$450^\circ - 360^\circ = 90^\circ$

$\sin(450^\circ) = \sin(90^\circ) = 1$

* ملاحظة مهمة :

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$

$\tan(-x) = -\tan(x)$

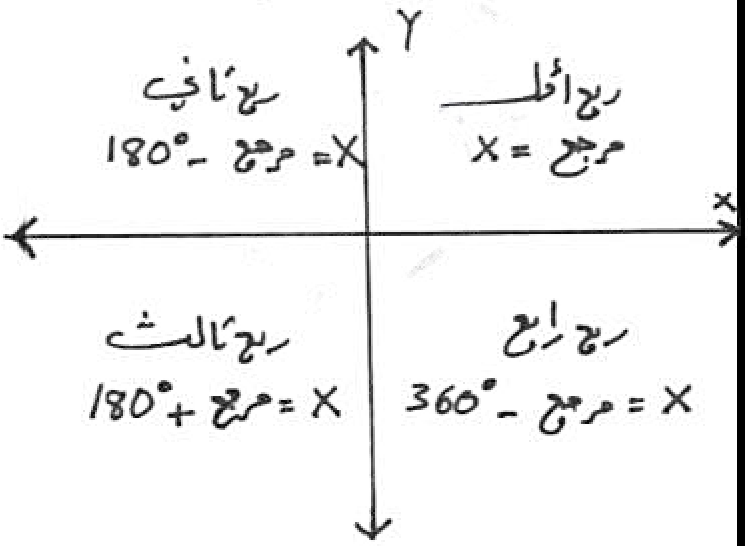
7) $\cos(-60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

$\sin(-60) = -\sin(60) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(-60) = -\tan(60) = -\sqrt{3}$

6) الحالة العكسية :

X الزاوية المراد إيجادها



* اقتران الأس الطبيعي e^x

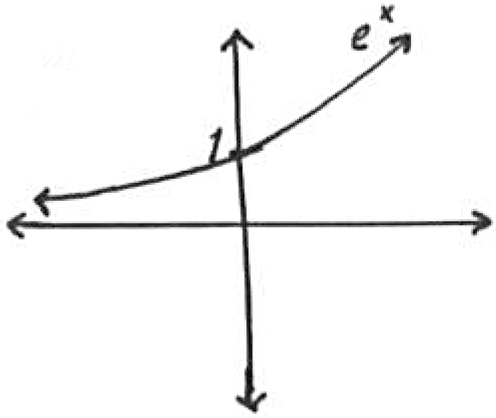
خصائص

1) $e^{x+y}=e^x\, e^y$

2) $e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y}$

3) $e^{\ln f(x)}=f(x)$

4) $\ln e^{f(x)}=f(x)$



مثال (1): جد حل المعادلة: $e^x=2-e^{-x}$

$e^x+e^{-x}-2=0 \to e^x+\frac{1}{e^x}-2=0$

$e^{2x}+1-2e^x=0 \to (e^x-1)(e^x-1)=0$

$\to e^x=1 \to \ln e^x=\ln 1 \to x=0$

مثال (2): جد حل المعادلة: $e^{2x}+3e^x-4=0$

$(e^x+4)(e^x-1)=0 \to e^x=1$

$\to x=0$

$\to e^x=-4$ (مرفوضة)

* اقتران اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$

$(\ln x\ ,\ x>0)$

خصائص

1) $\ln 1=0$ 2) $\ln e=1$

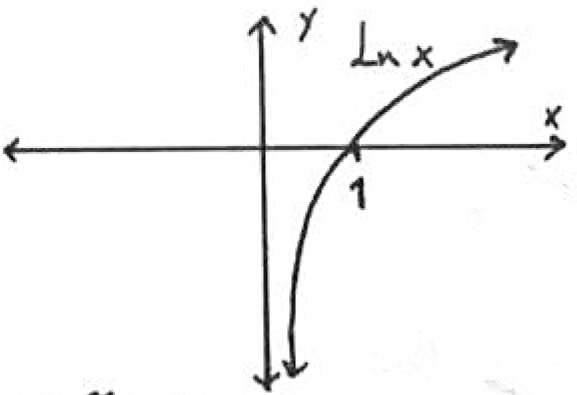
3) $\ln e^a=a$

4) $\ln(xy)=\ln x+\ln y$

5) $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln y$

6) $\ln x=\ln y \to x=y$

7) $\ln(x^n)=n\ln x$



مثال (3): جد حل المعادلة الآتية:

1) $\ln x=2 \to x=e^2$

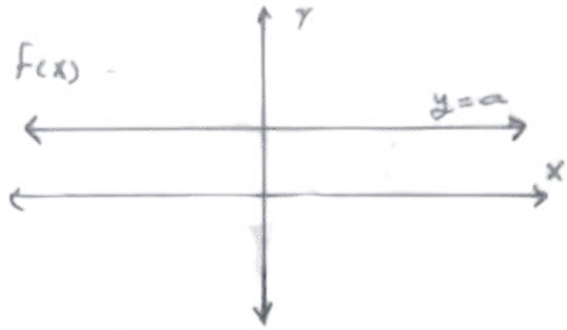
2) $\ln\sqrt{x}=5 \to \sqrt{x}=e^5$
$\to x=(e^5)^2 \to x=e^{10}$

3) $\ln(2x-5)=0 \to 2x-5=e^0$
$\to 2x-5=1 \to x=3$

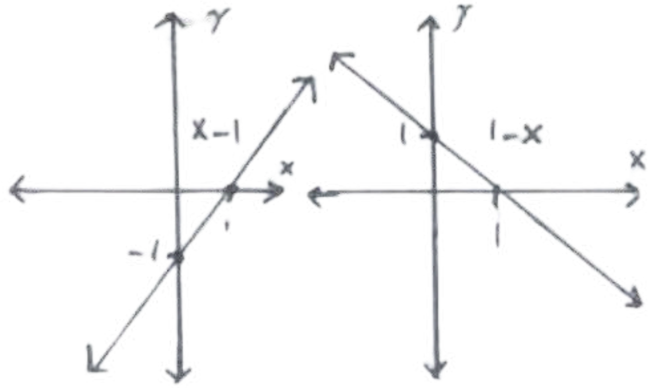
4) $(\ln x^3)^3=8 \to \ln x^3=2$
$\to x^3=e^2 \to x=\sqrt[3]{e^2}$

* بعض الاقترانات الأخرى:

1) الاقتران الثابت $f(x) = a$

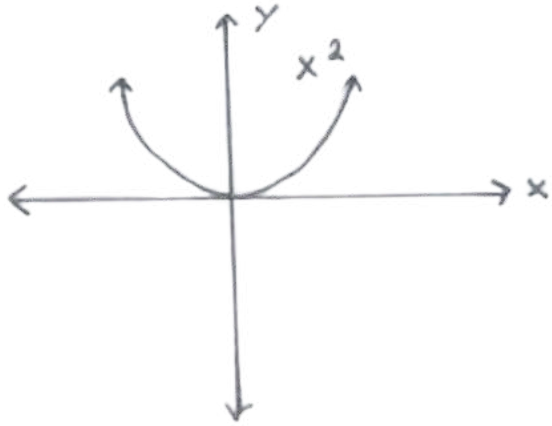


2) الاقتران الخطي $f(x) = ax + b$



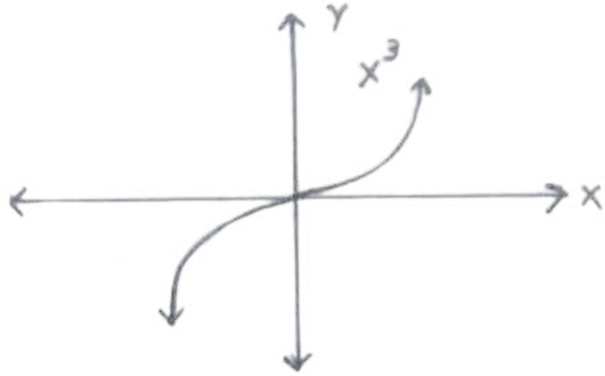
3) الاقتران التربيعي

$f(x) = ax^2 + bx + c$



4) الاقتران التكعيبي

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$



أكاديمية ومدارس أجيال العلم
Science Generations Academy

توجيهي 2008

دفعة الطليعة