إجابات أسئلة الدرس الأول

الدرس الأول : نظريتا الباقي والعوامل

القسمة باستعمال الجدول

تعلَّمْتُ سابقاً أن كثير الحدود بمتغير واحد يتكون من وحيد حدّ أو أكثر، وأن صورته العامة هي:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب ، و $a_n , a_{n-1} , \dots , a_1 , a_0$ أعداد حقيقية.

يسمى الاقتران الذي يكون في صورة :

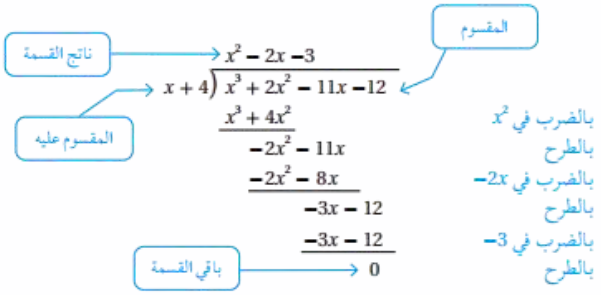
$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a_0$$

اقتران كثير حدود ومن أمثلته :

$$f(x)=x^3-6x^2+8x \quad , \quad p(x)=5 \quad , \quad p(x)=2-x$$

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه يُمكن قسمة كثير حدود على كثير حدود آخر باستعمال القسمة الطويلة.

فمثلاً يمكن قسمة $(x^3+2x^2-11x-12)$ على $(x+4)$ كما يأتي:



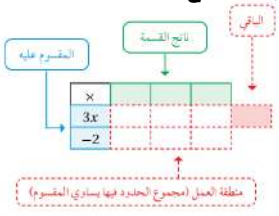
أما طريقة الجدول هي طريقة لقسمة كثيرات الحدود تعتمد بشكل أساسي على ضرب كثيرات الحدود، بوصفها عملية عكسية لعملية القسمة.

مثال:

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج : $(9x^3 - x + 3) \div (3x - 2)$ ثم أتحقق من صحة الحل.

خطوات الحل...

الخطوة 1: أُنشئ جدولاً من 4 أعمدة (درجة ناتج القسمة +2) و 3 صفوف (درجة المقسوم عليه +2)، ثم أكتب حدود المقسوم عليه في العمود الأيسر، وأُضيف خانة الباقي إلى منطقة العمل.



الخطوة 2 : أكتب الحد الرئيس من المقسوم $(9x^3)$ في الخانة اليسرى العليا من منطقة العمل.

×			
3x	$9x^3$		
−2			

الخطوة 3 : أبحث عن حد جبري ناتج ضربه في 3x يساوي $9x^3$ بما أنَّ ناتج ضرب 3x في $3x^2$ يساوي $9x^3$، فإنَّني أكتب $3x^2$ أعلى الجدول.

×	$3x^2$			
3x	$9x^3$			
−2				

الخطوة 4 : أضرب $3x^2$ في 2−، ثم أكتب الناتج $(-6x^2)$ في الخانة المناظرة للحدين المضروبين. وبما أنَّ المقسوم في المسألة الأصلية لا يحوي حدًا من الدرجة الثانية، فإنَّني أضيف $6x^2$ إلى منطقة العمل كي أحذف الحد $-6x^2$. عند إضافة $6x^2$ إلى منطقة العمل، فإنَّه يُمكن تحديد الحد الثاني من ناتج القسمة، وهو (2x)؛ لأنَّ ناتج ضرب 3x في 2x يساوي $6x^2$.

×	$3x^2$	$2x$	
3x	$9x^3$	$6x^2$	
−2	$-6x^2$		

الخطوة 5 : أضرب 2x في 2−، ثم أكتب الناتج 4x− في منطقة العمل. وللحصول على الحد ذي الدرجة 1 في المقسوم (x−)، يجب إضافة 3x إلى 4x− في منطقة العمل. عند إضافة 3x ، فإنَّه يُمكن تحديد الحد الأخير في ناتج القسمة، وهو (1)؛ لأن ناتج ضرب 3x في 1 يساوي 3x

×	$3x^2$	$2x$	1
3x	$9x^3$	$6x^2$	$3x$
−2	$-6x^2$	$-4x$	

الخطوة 6 : أضرب 1 في 2−، ثم أكتب الناتج 2− في الخانة المتبقية من منطقة العمل. وبما أنني لم أحصل على قيمة مساوية للحد الأخير (الثابت) في المقسوم، فهذا يعني أنَّني بحاجة إلى إضافة العدد 5 في خانة الباقي؛ لأنَّ ناتج جمعه إلى العدد 2− يساوي (3)، وهو الحدُّ الأخير (الثابت) في المقسوم، عندئذ يكون باقي القسمة 5

×	$3x^2$	$2x$	1	
3x	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	5
−2	$-6x^2$	$-4x$	−2	

الباقي

إذن، ناتج القسمة هو : $3x^2 + 2x + 1$ ، والباقي 5، ويُمكنني كتابة ذلك كما يأتي:

$$\frac{9x^3-x+3}{3x-2} = 3x^2+2x+1+\frac{5}{3x-2}$$

التحقق من صحة الحل...

يمكنني التحقق من صحة الحل بإيجاد مجموع الحدود في منطقة العمل، والتحقق من مساواتها للمقسوم.

$$9x^3 - 6x^2 + 6x^2 - 4x + 3x - 2 + 5 = 9x^3 - x + 3$$

أتحقق من فهمي

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

a) $(x^3 + 6x^2 - 9x - 14) \div (x + 1)$

	x^2	$5x$	-14	
x	x^3	$5x^2$	$-14x$	0 ← الباقي
1	x^2	$5x$	-14	

الناتج : $x^2 + 5x - 14$

الباقي : 0

$\Rightarrow (x^3 + 6x^2 - 9x - 14) \div (x + 1) =$

$x^2 + 5x - 14 + \frac{0}{x+1}$

$= x^2 + 5x - 14$

b) $(2x^3 - x^2 + 3) \div (x - 3)$

	$2x^2$	$5x$	15	
x	$2x^3$	$5x^2$	$15x$	48 الباقي
-3	$-6x^2$	$-15x$	-45	

الناتج : $2x^2 + 5x + 15$

الباقي : 48

$\Rightarrow (2x^3 - x^2 + 3) \div (x - 3) =$

$2x^2 + 5x + 15 + \frac{48}{x-3}$

نظرية الباقي

أُلاحظ أنَّه يُمكن إيجاد باقي قسمة كثير حدود، مثل:
$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$ على كثير حدود من الدرجة 1 ،
مثل : $(x - 3)$ بطريقتين :

الطريقة 1: القسمة الطويلة.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - x - 3 \\
\hline
x - 3 & 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5 \\
 & (-)\ 2x^3 - 6x^2 \\
\hline
 & -x^2 + 0x \\
 & -x^2 + 3x \\
\hline
 & -3x + 5 \\
 & -3x + 9 \\
\hline
 & -4
\end{array}
$$

الطريقة 2: طريقة الجدول.

×	$2x^2$	$-x$	-3
x	$2x^3$	$-x^2$	$-3x$	-4
-3	$-6x^2$	$3x$	9

الباقي

ولكن، هل يُمكن إيجاد باقي قسمة كثير حدود على كثير حدود من الدرجة 1 بطريقة أبسط ؟
أنظر أعلاه، أقارن بين باقي القسمة، وهو (4)، وقيمة P(3):

كثير الحدود المعطى	$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5$
بتعويض $x = 3$	$P(3) = 2(3)^3 - 7(3)^2 + 5$
بالضرب	$= 54 - 63 + 5$
بالتبسيط	$= -4$

أُلاحظ أن قيمة P(3) تساوي باقي قسمة كثير الحدود P(x) على (x-3)، وهذا يقودنا إلى نظرية الباقي

مفهوم أساسي

باقي قسمة كثير الحدود $P(x)$ على $(x - c)$ هو $P(c)$.

بوجه عام، فإنَّ باقي قسمة $P(x)$ على $(ax - b)$ هو $P(\frac{b}{a})$، حيث: $a \neq 0$.

أتحقق من فهمي

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة P(x) على h(x) في كل مما يأتي:

a) $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2, h(x) = x - 1$

الإجابة النهائية: 4

b) $P(x)=3x^3+8x^2-3x-6, h(x)=x+3$

الإجابة النهائية: -6

c) $P(x)=-2x^3-5x^2+10x+9, h(x)=2x+8$

الإجابة النهائية: 17

نظرية العوامل

إذا كان باقي قسمة كثير الحدود f(x) على (x-k) يساوي 0، فإن:

$$\frac{f(x)}{x-k}=q(x)$$

حيث q(x) كثير الحدود الناتج من القسمة. ومنه، فإنّ:

$$f(x)=(x-k)\,q(x)$$

أي إنَّ (x - k) عامل من عوامل f(x)، وهذا يُوضّح **نظرية العوامل** التي تُعد حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي

يكون $(x-c)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P(c)=0$.

بوجه عام، يكون $(ax-b)$ عاملًا من عوامل $P(x)$ إذا وفقط إذا كان: $P\left(\frac{b}{a}\right)=0$، حيث: $a\neq 0$.

إذا علم أحد عوامل كثير الحدود، فإنَّه يُمكن تحليله تحليلاً كاملاً، وذلك بكتابته في صورة حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي لا يُمكن تحليلها.

أتحقق من فهمي

إذا كان : $P(x)=x^3-2x^2-13x-10$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

a) أبين أنَّ (x-5) عامل من عوامل P(x).

الحل/

$x-5=0 \rightarrow x=5$

الآن :

$P(5)=(5)^3-2(5)^2-13(5)-10$

$=125-50-65-10$

$=125-125$

$=0$

∴ $x-5$ عامل من عوامل $P(x)$.

b) أحلل p(x) تحليلاً كاملاً .

الحل/

$$\begin{array}{r|l} x-5 & x^2+3x+2 \\ \hline & x^3-2x^2-13x-10 \\ & \mp x^3 \pm 5x^2 \\ \hline & 3x^2-13x \\ & \mp 3x^2 \pm 15x \\ \hline & 2x-10 \\ & \mp 2x \pm 10 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x^3-2x^2-13x-10=(x^2+3x+2)(x-5)$

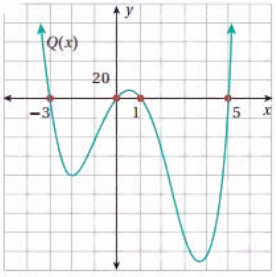
الآن :- حلل x^2+3x+2 $\Leftarrow$

$(x^2+3x+2)=(x+1)(x+2)$

$\therefore x^3-2x^2-13x-10=(x+1)(x+2)(x-5)$

الأصفار النسبية

أصفار كثير الحدود :هي قيم X التي يكون عندها P(x) = 0.
وعند تمثيل كثير الحدود بيانياً، فإنَّ أصفاره هي إحداثيات X لنقاط تقاطع منحناه مع المحور X. فمثلاً، لكثير الحدود Q(x) المعطى تمثيله البياني أدناه ، توجد 4 أصفار، هي: 3-,0,1,5، ويقطع عندها منحناه المحور X.



يُمكن استعمال نظرية الأصفار النسبية لإيجاد بعض الأصفار المحتملة لكثيرات الحدود؛ بغية اختبارها.

مفهوم أساسي

إذا كان: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ كثير حدود معاملاته أعداد صحيحة، فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون في صورة $\frac{p}{q}$، حيث p أحد عوامل الحدّ الثابت (a_0)، و q أحد عوامل المعامل الرئيس (a_n).

نتيجة من نظرية الأصفار النسبية

إذا كان: $a_n = 1$، فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون أحد عوامل الحدّ الثابت (a_0).

عند إيجاد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود، فإنه يمكن إيجاد أصفاره الأخرى باستعمال القسمة والتحليل.

مثال:

أجد جميع أصفار كثير الحدود: $p(x)=x^3 - 3x + 2$

خطوات الحل...

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود.
بما أن معامل الحد الرئيس 1، فإن الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت الذي يساوي (2).
إذن الأصفار النسبية المحتملة لكثير الحدود P(x) هي: ± 2 , ± 1

الخطوة 2: أنشئ جدولاً لاختبار بعض الأصفار النسبية المحتملة.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود؟
-1	$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$	✗
1	$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$	✓

بما أن: P(2) = 0، فإنه يوجد لكثير الحدود صفر عندما x = 2.
إذن، (x-2) عامل من عوامل P(x).

الخطوة 3: أحلل كثير الحدود تحليلاً كاملاً. بما أن (x-2) عامل من عوامل P(x)، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأخرى بقسمة P(x) على (x-2) ثم تحليل كثير الحدود الناتج (إن أمكن).

×	$2x^2$	$5x$	-3
x	$2x^3$	$5x^2$	$-3x$
-2	$-4x^2$	$-10x$	6

ناتج القسمة يساوي $(2x^2+5x-3)$ ومنه، يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$ كثير الحدود المعطى
$$= (x-2)(2x^2 + 5x - 3)$$ التحليل باستعمال القسمة
$$= (x-2)(2x-1)(x+3)$$ بتحليل ثلاثي الحدود

إذن، $P(x) = (x-2)(2x-1)(x+3)$.
ومنه، فإن أصفار P(x) الناتجة من تحليله هي:
$2 , \frac{1}{2} , -3$

أتحقق من فهمي

أجد جميع أصفار كثير الحدود في ما يأتي:

a) $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$

الإجابة النهائية:
$-1, 1, \frac{1}{5}$

b) $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

حل معادلات كثيرات الحدود

معادلة كثير الحدود هي معادلة يمكن كتابتها في صورة: $P(x) = 0$، حيث $P(x)$ كثير حدود من أي درجة، ويسمى كثير الحدود المرتبط بالمعادلة. يمكن حل بعض معادلات كثيرات الحدود باستعمال طرائق التحليل البسيطة التي تعلمتها سابقاً، مثل التحليل بإخراج عامل مشترك أو باستعمال التجميع، لكن بعض معادلات كثيرات الحدود لا يمكن حلها باستعمال هذه الطرائق، عندئذ يمكن استعمال نظرية الأصفار النسبية لتحليل كثير الحدود المرتبط بالمعادلة، ثم حل المعادلة.

عند إيجاد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود، فإنه يمكن إيجاد أصفاره الأخرى باستعمال القسمة والتحليل.

يمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية والعلمية باستعمال معادلات كثيرات حدود يتطلب حلها استعمال نظرية الأصفار النسبية.

أتحقق من فهمي

أحل كل معادلة مما يأتي:

a) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

الحل: معامل الحد الرئيس = 1 ⇐ الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الـ 9 ⇐ (الحد الثابت)

∴ الأصفار النسبية المحتملة:-

$\pm 1, \pm 3, \pm 9$

$\Rightarrow P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 9(1) + 9$

$= 1 - 1 - 9 + 9 = 0$

بما أن $P(1) = 0$ ⇐

$P(x)$ أحد عوامل $(x-1)$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 9 \\ \hline x-1 & x^3 - x^2 - 9x + 9 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \\ \hline & -9x + 9 \\ & \pm 9x \mp 9 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (x^2 - 9)(x - 1) = 0$

فرق بين مربعين

$\Rightarrow (x-3)(x+3)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 3, -3, 1$

الإجابة النهائية:
-4,-2,-1,1

b) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

الحل: * بما أن معامل الحد الرئيس (1) ⇐
الأصفار النسبية المحتملة مباشرة هي
عوامل الحد الثابت (-4) وهي :- $\pm1, \pm2, \pm4$

$\Rightarrow P(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 4 = 0$

⇐ P(x) أحد عوامل (x-1)

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4x+4 \\ \hline x-1 & x^3+3x^2-4 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \\ \hline & 4x^2-4 \\ & \mp 4x^2 \pm 4x \\ \hline & 4x-4 \\ & \mp 4x \pm 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x^3+3x^2-4 = (x^2+4x+4)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x^2+4x+4 = (x+2)(x+2) = 0$

$\Rightarrow (x+2)(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore x = -2, -2, 1$

أتحقق من فهمي

يزيد ارتفاع أسطوانة 5cm على طول نصف قطر قاعدتها. إذا كان حجم الأسطوانة $72\pi\ cm^3$، فما طول نصف قطر قاعدتها وارتفاعها؟

توجيه :- حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة * الارتفاع

$V = A * h$

* مساحة القاعدة = مساحة الدائرة = πr^2

حيث أن :- r : طول نصف قطر الدائرة.

الإجابة النهائية:

طول نصف قطر القاعدة = 3cm

ارتفاع الاسطوانة = 8cm

أتدرب وأحل المسائل

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

1 $(6x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 12) \div (3x - 4)$

الإجابة النهائية:
الناتج: $2x^3+x^2+4x+3$
الباقي: 0

2 $(2x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 10x + 15) \div (1 - 2x)$

الإجابة النهائية:
الناتج: $-x^4+2x^3+x^2-4x+3$
الباقي: 12

أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة P(x) على h(x) في كل مما يأتي:

3 $f(x)=8x^4+2x^3-53x^2+37x-6 \quad , h(x)=x+1$

الإجابة النهائية:
-90

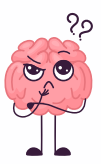
4 $f(x)=4x^3+2x^2-6x-8 \quad , h(x)=3x+4$

الإجابة النهائية:
$\frac{-160}{27}$

أبين أن h(x) عامل من عوامل f(x) في كل مما يأتي:

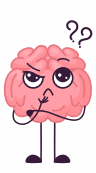
5 $f(x)= x^3-37x+84 \quad , h(x) =x+7$

الإجابة النهائية:



6 $f(x)= 2x^3-5x^2-x+6 \quad , h(x) =2x-3$

الإجابة النهائية:



أحلل كل اقتران مما يأتي تحليلاً كاملاً:

7 $f(x)= x^3+3x^2-13x-15$

الإجابة النهائية:

$(x+1)\,(x+5)\,(x-3)$

8 $g(x)= x^4-7x^3+13x^2+3x-18$

الإجابة النهائية:

$(x+1)\,(x-2)\,(x-3)\,(x-3)$

توجيه: استخدم القسمة مرتين

9 $h(x)= 2x^3-13x^2+17x+12$

الإجابة النهائية:
$(x-3)\ (2x+1)\ (x-4)$

10 $q(x)= 3x^3-18x^2+2x-12$

الإجابة النهائية:
$(x-6)\ (3x^2+2)$

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

11 $x^3-4x^2-7x+10=0$

الإجابة النهائية:
$x = \{+5 , -2 , 1\}$

12 $5x^3-15x^2-47x-15 = 2x^3-10x^2$

الإجابة النهائية:
$x = \{-\frac{1}{3} , -3 , 5\}$

13 $3x^3+3x^2-14x-8=0$

الإجابة النهائية:

$x=\{2\ ,\ \frac{-9\mp\sqrt{33}}{6}\}$

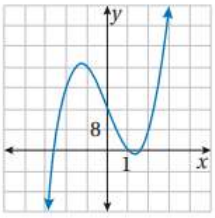
14 $6x^3-13x^2+x+2=0$

الإجابة النهائية:

$x=\{-\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 2\}$

أستعمل التمثيل البياني لمنحنى كل اقتران مما يأتي لإيجاد أحد أصفاره النسبية ، ثم إيجاد جميع أصفار الاقتران:

15 $f(x)=4x^3-20x+16$



الحل / تذكر:-
أصفار الإقتران هي نقاط تقاطعه مع محور x.
* نلاحظ من التمثيل البياني بأن الإقتران f(x) يقطع محور x في 3 نقاط ، لكن النقطة الواضحة والتي نستطيع الإعتماد عليها في الحل هي عند الـ (1).

الآن :-
الصفر الأول : $x=1$
العامل الأول : $(x-1)$

الآن :
نقسم $f(x)$ على $(x-1)$ لنجد باقي العوامل.

$$\begin{array}{r|l} x-1 & 4x^3-20x+16 \\ & \overline{4x^2+4x-16} \\ & \mp 4x^3 \pm 4x^2 \quad \text{بالجمع} \\ & +4x^2-20x \\ & \mp 4x^2 \pm 4x \\ & -16x+16 \\ & \pm 16x \mp 16 \\ & 0 \end{array}$$

$\therefore 4x^3-20x+16=(4x^2+4x-16)(x-1)$

سنلاحظ الآن صعوبة تحليل المقدار التربيعي
لذا سوف نجد مميز المقدار التربيعي $4x^2+4x-16$

$\Delta=b^2-4ac$
$=(4)^2-4(4)(-16)$
$=16+256$
$=272$

القانون العام :-

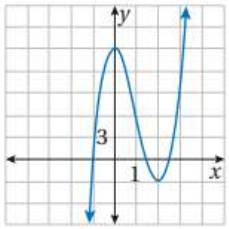
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad a\neq 0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{272}}{2(4)}=\frac{-4\pm\sqrt{272}}{8}$$

$\therefore$ أصفار الإقتران هي :-

$$\left\{x=1 \; ; \; x=\frac{-4+\sqrt{272}}{8} \; ; \; x=\frac{-4-\sqrt{272}}{8}\right\}$$

16 $f(x)=4x^3-12x^2-x+15$



الإجابة النهائية:

$x=\{-1\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{5}{2}\}$

17 إذا كان: $x = 4, x = 1$ هما حلين للمعادلة: $x^3-3x^2+ax+b=0$ ، فأجد الحل الثالث لها.

الحل/ مبدئياً يجب إيجاد قيم a و b :-

بما أن $x=1$ هو حل للمعادلة فإن

ناتج تعويضها يساوي صفر وكذلك $x=4$

الآن :-

عندما $x=1 \Leftarrow (1)^3-3(1)^2+a(1)+b=0$

$\Rightarrow 1-3+a+b=0 \Rightarrow -2+a+b=0$

$\therefore a+b=2$ ------ (1)

عندما $x=4 \Leftarrow (4)^3-3(4)^2+a(4)+b=0$

$\Rightarrow 64-48+4a+b=0$

$\Rightarrow 16+4a+b=0$

$\therefore 4a+b=-16$ ------ (2)

الآن أصبح هناك معادلتين بمجهولين يمكن

حلها بالتعويض كالتالي :-

$a+b=2 \Rightarrow a=2-b$ ---- (1)

$\Rightarrow 4(2-b)+b=-16$ ---- (2)

$\Rightarrow 8-4b+b=-16 \Rightarrow 8-3b=-16$

$\Rightarrow -3b=-16-8=-24 \Rightarrow \frac{-3b}{-3}=\frac{-24}{-3}$

$\therefore b=8$

الآن : عوّض قيمة b الناتجة في أي

من المعادلتين :- (ولتكن المعادلة الأولى)

$\Rightarrow a=2-8=-6$

$\therefore a=-6$

الآن أصبحت المعادلة: $x^3-3x^2-6x+8=0$

الحل الأول : $x=1 \Leftarrow$ العامل الأول: $x-1$

الحل الثاني : $x=4 \Leftarrow$ العامل الثاني: $x-4$

$\Leftarrow$ لإيجاد الحل الثالث نقسم المعادلة:

x^3-3x^2-6x+8 على أحد العاملين

وليكن العامل الأول $x-1 \Leftarrow$

$$\begin{array}{r|l} & x^2-2x-8 \\ \hline x-1 & x^3-3x^2-6x+8 \\ & \mp x^3 \pm x^2 \quad \text{بالجمع} \\ \hline & -2x^2-6x \\ & \pm 2x^2 \mp 2x \quad \text{بالجمع} \\ \hline & -8x+8 \\ & \pm 8x \mp 8 \quad \text{بالجمع} \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x^3-3x^2-6x+8=(x^2-2x-8)(x-1)$

$=(x-4)(x+2)(x-1)$

$\Rightarrow x=1, 4, \boxed{-2} \rightarrow$ الحل الثالث

18 إذا كان باقي قسمة $f(x)= x^3+ax^2+x+5$ على $x-1$ يساوي مثلي باقي قسمته على $x+1$ ، فما قيمة a؟

الحل/ حسب نظرية الباقي فإن باقي قسمة $f(x)$ على $(x-1)$ يساوي :- $f(1)$

$$f(1) = (1)^3+a(1)^2+1+5$$
$$= a+7 \quad ------(1)$$

كذلك باقي قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ تساوي $f(-1)$

$$f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2-1+5$$
$$= -1+a-1+5$$
$$= a+3 \quad ----------(2)$$

الآن نلاحظ بأن :-

معطيات :- $a+7 = 2(a+3)$

$$a+7 = 2a+6 \Rightarrow 7 = a+6$$
$$-a \quad -a \quad -6 \quad -6$$
$$\therefore a=1$$

19 منحوتات جليدية:

تصنع بعض المنحوتات الجليدية عن طريق ملء قالب بالماء ثم تجميده.إذا كانت إحدى المنحوتات الجليدية على شكل هرم قاعدته مربعة الشكل ، وارتفاعها يزيد 1m على طول قاعدتها،فأجد أبعاد المنحوتة إذا كان حجمها $4m^3$.

الحل/ تذكر :-

حجم الهرم $(V) = \frac{1}{3} *$ مساحة القاعدة $*$ الإرتفاع

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} * A * h$$

مساحة القاعدة = مساحة المربع $=$ (الضلع)^2

الآن :-

نفرض أن :- طول ضلع القاعدة $= x$

$\Leftarrow$ الإرتفاع $(h) = x+1$ (معطيات)

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}(x^2)(x+1)$$
$$\Rightarrow 4 = \frac{x^3+x^2}{3} \Rightarrow 12 = x^3+x^2$$
$$\therefore x^3+x^2-12=0$$

حسب الأحضار النسبية فإن الحل الأول $x=2$

$\Leftarrow$ العامل الأول $= x-2$

الآن نقسم x^3+x^2-12 على $x-2$

لنجد العوامل الأخرى .

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x+6 \\ x-2 & x^3+x^2-12 \\ \hline & \mp x^3 \pm 2x^2 \quad \text{بالجمع} \\ \hline & 3x^2-12 \\ & \mp 3x^2 \pm 6x \quad \text{بالجمع} \\ \hline & 6x-12 \\ & \mp 6x \pm 12 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x^3+x^2-12=(x-2)(x^2+3x+6)$

لكن: x^2+3x+6 لا تحلل لأن المميز أقل من صفر

$\Delta = b^2-4ac = (3)^2-4(1)(6)$

$= 9-24 = -15 < 0$

$\therefore x=2$ هو الحل الوحيد للمعادلة.

أبعاد المنحوتة كالتالي:-

طول ضلع القاعدة $= x = 2m$

الارتفاع $(h) = x+1 = 2+1 = 3m$

إذا كان : $f(x)=ax3+bx2-9x-9$ ، حيث: a,b ثابتان ، و $a,b \neq 0$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

20 إذا كان $(x-3)$ عاملاً من عوامل الاقتران $f(x)$ ، فأبين أن: $3a+b=4$.

$f(x)$ عامل من عوامل $(x-3)$

باقي قسمة $f(x)$ على $(x-3)$ يساوي صفر

حسب نظرية الباقي فإن $f(3)=0$

$\Rightarrow f(3)=a(3)^3+b(3)^2-9(3)-9=0$

$= 27a+9b-27-9=0$

$= 27a+9b-36=0$

$\Rightarrow 27a+9b=36$

$\therefore 3a+b=4$ # بقسمة الطرفين على (9)

21 إذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $x-2$ يساوي -15، فأبين أن: $2a+b=3$.

باقي قسمة $f(x)$ على $(x-2)$ يساوي -15

حسب نظرية الباقي :- $\Rightarrow f(2)=-15$

$\Rightarrow f(2)=a(2)^3+b(2)^2-9(2)-9=-15$

$\Rightarrow 8a+4b-27=-15 \Rightarrow 8a+4b=12$

$\therefore 2a+b=3$ # بقسمة الطرفين على (4)

22 أجد قيمة كل من a ، و b .

من الفرعين 20 و 21 نستطيع تكوين معادلتين بمجهولين كالتالي:-

$3a+b=4$ ----- (1)

$2a+b=3$ ----- (2)

وبطرح المعادلة 2 من المعادلة 1 ينتج أن:-

$a=1$

الآن نعوض $a=1$ في أي من المعادلتين ولتكن المعادلة الأولى:-

$3(1)+b=4 \Rightarrow 3+b=4$

$\therefore b=1$

23 صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات، أبعاده بالأمتار: $2 , x , x^2+6x-19$.
ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48m^3$.

الحل / حجم الصندوق = حجم متوازي المستطيلات

$\Leftarrow V =$ الطول × العرض × الارتفاع

$V = l \times w \times h$

$48 = 2 \times x \times (x^2+6x-19)$

$48 = 2x^3+12x^2-38x$

$\Rightarrow 2x^3+12x^2-38x-48=0$

الآن نستخدم الأصفار النسبية لإيجاد أصفار المعادلة التكعيبية.

* نستطيع قبل البدء بالحل قسمة طرفي المعادلة

على (2) $\Leftarrow \frac{2x^3+12x^2-38x-48=0}{2}$

$\Rightarrow x^3+6x^2-19x-24=0$

$\Leftarrow$ معامل الحد الرئيس (1) $\Leftarrow$ الأصفار النسبية المحتملة هي عوامل الحد الثابت فقط $\Leftarrow$

الحل الأول: $x=3$

العامل الأول: $x-3$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+9x+8 \\ \hline x-3 & x^3+6x^2-19x-24 \\ & \mp x^3 \pm 3x^2 \\ \hline & 9x^2-19x \\ & \mp 9x^2 \pm 27x \\ \hline & 8x-24 \\ & \mp 8x \pm 24 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x^3+6x^2-19x-24=(x^2+9x+8)(x-3)$

$\Rightarrow (x+8)(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=\{-8, -1, 3\} \Rightarrow x=\{3\}$

ترفض ترفض لأن x بعد (طول)

مهارات التفكير العليا

24 مسألة مفتوحة:

أكتب اقتراناً من الدرجة الثالثة يكون $(x-3)$ أحد عوامله، ويكون باقي قسمته على $(x+1)$ يساوي -8

بما أن الإقتران المطلوب من الدرجة الثالثة

و $(x-3)$ أحد عوامله ⇐

$$f(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$$

الآن: المطلوب هو ايجاد قيم a ، b ، c

حسب نظرية الباقي فإن: $f(-1)=-8$

$$\Rightarrow f(-1)=(-1-3)(a(-1)^2+b(-1)+c$$

$$\Rightarrow \frac{-8}{-4}=\frac{-4}{-4}(a-b+c)$$

$$\Rightarrow 2=(a-b+c)$$

الآن: نستطيع إختيار قيم a و b ومنه نجد قيمة c، ولتكن:

$$a=1\ ,\ b=2 \Rightarrow 2=1-2+c$$

$$\Rightarrow 2=-1+c \quad \therefore c=3$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-3)(x^2+2x+3)$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2+3x-3x^2-6x-9$$

$$\Rightarrow f(x)=x^3-x^2-3x-9$$ أحد الإقترانات

تحقق بنفسك من صحة الإقتران ؟؟؟!!!

25 أكتشف الخطأ:

أرادت سهام إيجاد الأصفار النسبية المحتملة للاقتران:

$f(x)=-8x^6+7x^5-3x^4+45x^3-1500x^2+16x$

فكان حلها كالآتي:

$f(x)=-8x^6+7x^5-3x^4+45x^3-1500x^2+16x$

$\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{16}, \pm\frac{1}{8}$ ✗

أبين الخطأ الذي وقعت فيه سهام، ثم أصححه.

الحل/ الأصفار النسبية المحتملة للإقتران تكون بقسمة الحد الثابت على المعامل الرئيس

ونلاحظ هنا أن سهام إستخدمت الحد الأخير مع المعامل الرئيس مع العلم أن الحد الأخير ليس ثابت.

التصحيح:-

نأخذ x عامل مشترك ⇐

$$f(x)=x(-8x^5+7x^4-3x^3+45x^2-1500x+16)$$

الآن:-

عوامل الحد الثابت (16):- $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8, \pm16$

عوامل الحد الرئيس (-8):- $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

الأصفار النسبية المحتملة:- $\pm1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm2$

$\pm4, \pm8, \pm16$

نلاحظ عدم وجود $\pm\frac{1}{16}$ كما جاءت سهام وهذا يدل على أنها قامت بقسمة عوامل الحد الرئيس على عوامل الحد الثابت وهذا خطأ آخر.

26 تحدّ:

إذا كان باقي قسمة كثير الحدود f(x) على (x-3) يساوي 4، وباقي قسمته على (x+2) يساوي 9، فأجد باقي قسمة f(x) على (x+2)(x-3)

الحل

الناتج $4x-4$

$$x^2+3x-4 \overline{)\ 4x^3+8x^2-41x+28}$$

$$\mp 4x^3 \mp 12x^2 \pm 16x$$

$$-4x^2-25x+28$$

$$\pm 4x^2 \pm 12x \mp 16$$

الباقي $-13x+12$

نلاحظ هنا بأن عملية القسمة توقفت عندما أصبحت درجة المقسوم $(-13x+12)$ أقل من درجة المقسوم عليه (x^2+3x-4).

أسئلة كتاب التمارين

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كل مما يأتي:

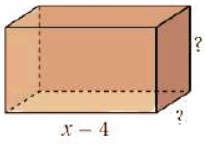
1 $(6x^3 - 7x^2 + 6x + 45) \div (2x + 3)$

الإجابة النهائية:
الناتج : $3x^2 - 8x + 15$
الباقي: 0

2 $(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 8x + 9) \div (x - 2)$

الإجابة النهائية:
الناتج : $3x^3 + 7x + 5x + 2$
الباقي: 13

3 يمثل الاقتران: $V(x) = x^3 + 3x^2 - 36x + 32$ حجم متوازي المستطيلات المجاور.
أجد الأبعاد الأُخرى لمتوازي المستطيلات بدلالة x.



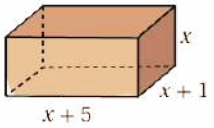
الإجابة النهائية:

البعد الأول = x+8
البعد الثاني = x−1

4 إذا كان باقي قسمة: $f(x) = 2x^3 - x^2 + ax + 6$ على $h(x) = x + 2$ يساوي (−4)، فما قيمة a؟

الإجابة النهائية:
a = −5

5 أجد أبعاد متوازي المستطيلات في الشكل المجاور إذا كان حجمه $180cm^3$



الإجابة النهائية:
4cm , 5cm , 9cm

6 إذا كان باقي قسمة : $f(x)= ax^3+bx^2+bx+3$ على $h(x)=x-1$ يساوي (4)، وكان $(x + 1)$ عاملًا من عوامل $f(x)$، فما قيمة كل من a، وb؟

الإجابة النهائية:
a=3 , b=-1

أحلل كل اقتران مما يأتي تحليلاً كاملاً:

7 $3x^3+14x^2-7x-10$

الإجابة النهائية:

$(x+5)(x-1)(3x+2)$

8 $2x^4+x^3-5x^2+2x$

الإجابة النهائية:

أحل كل معادلة مما يأتي :

9 $3x^3-4x^2-6x+4=0$

الإجابة النهائية:
$x=2 \ , \ x=\frac{-2+\sqrt{28}}{6} \ , \ \frac{-2-\sqrt{28}}{6}$

10 $2x^3+5x^2-16x-36=0$

الإجابة النهائية:
$x=-2 \ , x=\frac{-1+\sqrt{145}}{4} \ , \ x=\frac{-1-\sqrt{145}}{4}$

11 يزيد ارتفاع مخروط 5cm على طول نصف قطر قاعدته. إذا كان حجم هذا المخروط $24\pi\ cm^3$، فما أبعاده؟
(حجم المخروط هو $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث r نصف قطر القاعدة، وh الارتفاع).

الإجابة النهائية:

h= 11cm , r= 6cm