إجابات أسئلة الدرس الثاني

الدرس الثاني : الكسور الجزئية

تجزئة المقادير النسبية

تعلمت سابقا أن المقدار الجبري النسبي هو مقدار جبري يمكن كتابته في صورة كسر بسطه ومقامه كثيرا حدود، وتعلمت أيضًا أنه عند جمع مقدارين نسبيين مختلفي المقام أو طرحهما، فإنَّه يجب أولا توحيد مقاميهما باستعمال المضاعف المشترك الأصغر (م. م. أ) للمقامين كما يأتي:

بتوحيد المقامين
$$\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x+2}=\frac{3(x+2)}{(x-4)(x+2)}-\frac{2(x-4)}{(x+2)(x-4)}$$

بطرح البسطين
$$=\frac{3x+6-2x+8}{(x-4)(x+2)}$$

بالتبسيط
$$=\frac{x+14}{(x-4)(x+2)}$$

تجزئة المقادير النسبية هي عملية عكسية للعملية السابقة، ينتج منها كتابة المقدار النسبي في صورة مجموع مقادير جبرية نسبية، يُبسّط كل منها في صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث P و Q كثيرا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q، ويُسمّى كلّ من هذه المقادير النسبية كسرًا جزئياً.

$$\underbrace{\frac{x+14}{(x-4)(x+2)}}_{\text{تجزئة المقدار النسبي}}=\underbrace{\frac{3}{x-4}}_{\text{كسر جزئي}}+\underbrace{\frac{-2}{x+2}}_{\text{كسر جزئي}}$$

تعتمد عملية تجزئة المقادير الجبرية النسبية على عوامل المقام.
سأتعلم في هذا الدرس ثلاث حالات مختلفة من التجزئة تبعاً لنوع عوامل المقام، وهي:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مكرر.
- عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مُكرَّر ، ولا يُمكن تحليله (مميزه سالب).
- درجة كثير الحدود في بسطه مُساوية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها

1 تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية مختلفة.

إذا كانت جميع عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي خطية، فإنه ينتج من كل منها كسر جزئي بسطه ثابت ومقامه العامل الخطي في الصورة الآتية:

$$\frac{\overbrace{A}^{\text{ثابت}}}{\underbrace{ax+b}_{\text{عامل خطي}}}$$

مفهوم أساسي

إذا كان $Q(x)$ كثير حدود يُمكن تحليله تحليلًا كاملًا من دون تكرار أيِّ عامل في الصورة الآتية:

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_3x+b_3)\dots(a_nx+b_n)$$

فإنَّه يُمكن تجزئة المقدار الجبري النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث درجة P أقل من درجة Q، في الصورة الآتية:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\frac{A_3}{a_3x+b_3}+\dots+\frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

أتحقق من فهمي

أجزئ كل مقدار نسبي مما يأتي إلى كسور جزئية:

1 $\frac{x}{x^2-5x+6}$

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\cancel{(x-2)(x-3)}\ \frac{x}{\cancel{(x-2)(x-3)}}=\cancel{(x-2)(x-3)}\ \frac{A(x-3)+B(x-2)}{\cancel{(x-2)(x-3)}}$$

$\Rightarrow x = A(x-3) + B(x-2)$

* عوّض $x=3$:-

$3 = A(3-3) + B(3-2)$

$\Rightarrow 3 = B(1) \quad \therefore B = 3$

* عوّض $x=2$:-

$2 = A(2-3) + B(2-2)$

$\Rightarrow 2 = -A \quad \therefore A = -2$

$\therefore \frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$

2 $\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}$

الحل: حلل المقام :-

$x^3+5x^2+2x-8 = (x-1)(x^2+6x+8)$

$= (x-1)(x+2)(x+4)$

$\Rightarrow \frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+4}$

$\Rightarrow \frac{x^2+x-6}{(x-1)(x+2)(x+4)} = \frac{A(x+2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+4)}$

$\Rightarrow x^2+x-6 = A(x+2)(x+4) + B(x-1)(x+4) + C(x-1)(x+2)$

* عوّض $x=-2$

$\Rightarrow (-2)^2 + (-2) - 6 = A(-2+2)(-2+4) + B(-2-1)(-2+4) + C(-2-1)(-2+2)$

$\Rightarrow -4 = B(-3)(2) \Rightarrow \frac{-4}{-6} = \frac{-6B}{-6}$

$\therefore B = \frac{2}{3}$

* عوّض $x=-4$

$(-4)^2 + (-4) - 6 = A(-4+2)(-4+4) + B(-4-1)(-4+4) + C(-4-1)(-4+2)$

$\Rightarrow 6 = C(-5)(-2) \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{10C}{10}$

$\therefore C = \frac{3}{5}$

* عوّض $x=1$

$(1)^2 + (1) - 6 = A(1+2)(1+4) + B(1-1)(1+4) + C(1-1)(1+2)$

$\frac{-4}{15} = \frac{15A}{15} \quad \therefore A = \frac{-4}{15}$

$\therefore \frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8} = \frac{\frac{-4}{15}}{x-1} + \frac{\frac{2}{3}}{x+2} + \frac{\frac{3}{5}}{x+4}$

$= \frac{-4}{15(x-1)} + \frac{2}{3(x+2)} + \frac{3}{5(x+4)}$

2 تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية، أحدها مكرر

في بعض الحالات، ينتج من التحليل الكامل لمقام المقدار النسبي تكرار أحد العوامل الخطية.

مفهوم أساسي

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا نسبيًّا، وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل خطّي مُكرَّر n من المَرّات، ودرجة P أقل من درجة Q، فإنَّ تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تتضمَّن الحدود الآتية:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

أتحقق من فهمي

أجزئ $\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}$ إلى كسور جزئية.

الحل

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}=\frac{Ax(x-2)}{x\cdot x(x-2)}+\frac{B(x-2)}{x^2(x-2)}+\frac{Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$\Rightarrow x^2(x-2)\cdot\frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}=x^2(x-2)\cdot\frac{Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$\Rightarrow x^2+8x+4=Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2$$

* نفرض $x=0$

$$(0)^2+8(0)+4=A(0)(0-2)+B(0-2)+C(0)^2$$

$$\Rightarrow 4=-2B \quad \therefore B=-2$$

* نفرض $x=2$

$$(2)^2+8(2)+4=A(2)(2-2)+B(2-2)+C(2)^2$$

$$\Rightarrow 4+16+4=4C \Rightarrow \frac{24}{4}=\frac{4C}{4}$$

$$\therefore C=6$$

* نفرض أي قيمة لـ x ولتكن مثلاً $x=1$

$$(1)^2+8(1)+4=A(1)(1-2)+B(1-2)+C(1)^2$$

$$13=-A-B+C$$

لكن $B=-2$ ، $C=6$ من الخطوات السابقة:

$$\Rightarrow 13=-A-(-2)+(6)$$

$$13=-A+2+6 \Rightarrow 13=-A+8$$

$$-8 \quad -8$$

$$\Rightarrow 5=-A \quad \therefore A=-5$$

$$\therefore \frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{-5}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{6}{x-2}$$

3 تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مكرر، ولا يمكن تحليله

في بعض الحالات، قد يحوي تحليل المقام عاملا تربيعيا لا يمكن تحليله، عندئذ ينتج من العامل التربيعي كسر جزئي بسطه كثير حدود خطي في صورة Ax + B، ومقامه العامل التربيعي.

مفهوم أساسي

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا جبريًّا نسبيًّا، وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله وهو $(ax^2 + bx + c)$، ودرجة P أقل من درجة Q، فإنَّ تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تتضمَّن الحدَّ $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$

أتحقق من فهمي

أجزئ $\frac{21 - 7x}{(x+5)(x^2+3)}$ إلى كسور جزئية.

الحل

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$$\Rightarrow \frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)} = \frac{A(x^2+3)}{(x+5)(x^2+3)} + \frac{(Bx+C)(x+5)}{(x^2+3)(x+5)}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5)(x^2+3)}{(x+5)(x^2+3)} \cdot \frac{21-7x}{} = \frac{(x+5)(x^2+3)}{(x+5)(x^2+3)} \cdot \frac{A(x^2+3)+(Bx+C)(x+5)}{}$$

$$21-7x = A(x^2+3)+(Bx+C)(x+5)$$

* نعوض $x=-5$

$$21-7(-5) = A((-5)^2+3) + (B(-5)+C)(-5+5)$$

$$\frac{56}{28} = \frac{28A}{28} \quad \therefore A=2$$

* نعوض $x=0$ وقيمة A الناتجة (2):

$$21-7(0) = 2((0)^2+3) + (B(0)+C)(0+5)$$

$$21 = 6 + 5C \Rightarrow \frac{15}{5} = \frac{5C}{5}$$

$$\therefore C=3$$

* نعوض أي قيمة لـ x ولتكن $x=1$

كذلك نعوض قيم A و C الناتجتين:

$$21-7(1) = 2((1)^2+3) + (B(1)+(3))(1+5)$$

$$14 = 8 + 6B + 18$$

$$14 = 26 + 6B \Rightarrow -12 = 6B$$

$$-26 \quad -26 \qquad \frac{-12}{6} = \frac{6B}{6}$$

$$\therefore B=-2$$

$$\therefore \frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)} = \frac{2}{x+5} + \frac{-2x+3}{x^2+3}$$

كسر جزئي ← ، كسر جزئي ←

4 تجزئة مقدار نسبي ، درجة كثير الحدود في بسطه مُساوية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها

تعلمنا في الأمثلة السابقة تجزئة مقادير نسبية مختلفة في صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيث P و Q كثيرا حدود، ولا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q. ولكن، إذا كانت درجة P مساوية لدرجة Q أو أكبر منها، فيجب أولا تجهيز المقدار النسبي باستعمال القسمة الطويلة، وذلك بقسمة P على Q.

أتحقق من فهمي

أجزئ $\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}$ إلى كسور جزئية.

الحل / درجة البسط = درجة المقام

⇐ نقسم البسط على المقام أولاً باستخدام القسمة الطويلة.

$$\begin{array}{r|l} & \text{الناتج } 3 \Rightarrow \\ x^2+x & 3x^2+12x+4 \\ & \mp 3x^2 \mp 3x \\ & \text{الباقي } \Rightarrow 9x+4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+12x+4}{x^2+x} = 3 + \frac{9x+4}{x^2+x}$$

الآن :- جزئ $\frac{9x+4}{x^2+x}$:-

$$\frac{9x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{9x+4}{x(x+1)} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

$$\Rightarrow \cancel{x(x+1)}\frac{9x+4}{\cancel{x(x+1)}} = \cancel{x(x+1)}\frac{A(x+1)+Bx}{\cancel{x(x+1)}}$$

$$\Rightarrow 9x+4 = A(x+1)+Bx$$

* عوّض $x=0$

$$9(0)+4 = A(0+1)+\cancel{B(0)}$$

$$4 = A$$

* عوّض $x=-1$

$$9(-1)+4 = \cancel{A(-1+1)}+B(-1)$$

$$-9+4 = -B \Rightarrow B = 5$$

الآن :-

$$\frac{9x+4}{x^2+x} = \frac{4}{x} + \frac{5}{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+12x+4}{x^2+x} = 3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x+1}$$

أتدرب وأحل المسائل

أجزئ كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1 $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x+3)}$

الإجابة النهائية: $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{-9}{x+2} + \dfrac{11}{x+3}$

2 $\dfrac{2x+22}{x^2+2x}$

الإجابة النهائية: $\dfrac{2x+22}{x^2+2x} = \dfrac{11}{x} - \dfrac{9}{x+2}$

3 $\dfrac{4x-30}{x^2-8x+15}$

الإجابة النهائية:
.....

$\dfrac{4x-30}{x^2-8x+15} = \dfrac{-5}{x-5} + \dfrac{9}{x-3}$

4 $\dfrac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}$

الإجابة النهائية:
.....

$\dfrac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)} = \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{2x-3}{x^2+1}$

5 $\dfrac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}$

الإجابة النهائية:

$\dfrac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)} = \dfrac{-2}{x} + \dfrac{5}{x-1} + \dfrac{2}{1-2x}$

6 $\dfrac{x}{8x^2-10x+3}$

الإجابة النهائية:

$\dfrac{x}{8x^2-10x+3} = \dfrac{3}{2(4x-3)} - \dfrac{1}{2(2x-1)}$

7 $\frac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}$

$\frac{1}{3x^3-3x^2-32x-15} = \frac{1}{40(x+3)} + \frac{1}{88(x-5)} - \frac{4}{55(2x+1)}$

الإجابة النهائية:

8 $\frac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$

$\frac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{2x-1}$

الإجابة النهائية:

9 $\dfrac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}$

الإجابة النهائية:

$$\frac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}=\frac{1}{4(x+2)}+\frac{7}{4(x-2)}+\frac{1}{3-x}$$

10 $\dfrac{(x-3)^2}{x^3-16x}$

الإجابة النهائية:

$$\frac{(x-3)^2}{x^3-16x}=\frac{-9}{16x}+\frac{49}{32(x+4)}+\frac{1}{32(x-4)}$$

11 $\dfrac{7x-3}{x^2-8x+16}$

12 $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)^2}$

الإجابة النهائية:

$\dfrac{7x-3}{x^2-8x+16} = \dfrac{7}{(x-4)} + \dfrac{25}{(x-4)^2}$

الإجابة النهائية:

$\dfrac{1}{(x+1)(x-2)^2} = \dfrac{1}{9(x+1)} - \dfrac{1}{9(x-2)} + \dfrac{1}{3(x-2)^2}$

13 $\dfrac{2x^2 - x - 6}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

الإجابة النهائية:

$\dfrac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x} = \dfrac{-3}{2x} + \dfrac{7}{2(x+2)} - \dfrac{2}{(x+2)^2}$

14 $\dfrac{x-3}{x^3+3x}$

الإجابة النهائية:

$\dfrac{x-3}{x^3+3x} = \dfrac{-1}{x} + \dfrac{x+1}{x^2+3}$

15 $\dfrac{x^2+2x+40}{x^3-125}$

16 $\dfrac{-2x^3-30x^2+36x+216}{x^3+216}$

الإجابة النهائية:

$\dfrac{x^2+2x+40}{x^3-125} = \dfrac{1}{x-5} - \dfrac{3}{x^2+5x+25}$

الإجابة النهائية:

$-2 + \dfrac{-6}{x+6} + \dfrac{-24x+144}{x^2-6x+36}$

17 $\dfrac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$

الإجابة النهائية:
.....

$x+4-\frac{6}{x+5}-\frac{8}{x+3}$

18 $\dfrac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

الإجابة النهائية:
.....

$x^2+\frac{3}{x-2}-\frac{x+1}{x^2+1}$

19 أبين أنه يمكن كتابة $\frac{1}{x^2-a^2}$ في صورة $\frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}$ حيث a عدد حقيقي لا يساوي صفراً

الحل

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$$ ← فرق بين مربعين

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A(x+a)+B(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

$$\Rightarrow \cancel{(x-a)(x+a)}\ \frac{1}{\cancel{(x-a)(x+a)}} = \frac{A(x+a)+B(x-a)}{\cancel{(x-a)(x+a)}}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x+a)+B(x-a)$$

بتعويض $x=a$

$$1 = A(a+a) + \cancel{B(a-a)}$$

$$\Rightarrow 1 = 2aA \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2a}}$$

بتعويض $x=-a$

$$1 = \cancel{A(-a+a)} + B(-a-a)$$

$$\Rightarrow 1 = -2aB \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{-2a}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)}$$

وهو المطلوب #

20 إذا كان: $\frac{5x}{(x+3)^2} = \frac{P}{x+3} - \frac{3P}{(x+3)^2}$

فأجد قيمة P.

الحل / نوحد مقامات أولاً:

$$\frac{5x}{(x+3)^2} = \frac{P(x+3)-3P}{(x+3)^2}$$

بعد ضرب طرفي المعادلة بـ $(x+3)^2$

$$5x = P(x+3) - 3P$$

نعوض $x=-3$

$$5(-3) = \cancel{P(-3+3)} - 3P$$

$$\Rightarrow -15 = -3P \quad \therefore \boxed{P=5}$$

21 إذا كان:

$$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{Px-37}{9(x^2+2)} - \frac{P}{9(x-1)} + \frac{8P}{3(x-1)^2}$$

، فأجد قيمة p .

الحل / نوحد المقامات

$$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{(Px-37)(x-1)^2 - P(x-1)(x^2+2) + 24P(x^2+2)}{9(x-1)^2(x^2+2)}$$

$$\Rightarrow 9(x^2+8x+7) = (Px-37)(x-1)^2 - P(x-1)(x^2+2) + 24P(x^2+2)$$

بتعويض $x=1$

$$9(1+8+7) = 24P(1+2)$$

$$144 = 72P \Rightarrow \boxed{P=2}$$

هندسة ميكانيكية: يستعمل الاقتران الآتي لتقدير درجة الحرارة لعادم محرك ديزل:

$$R(x)=\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}\ ,\ 0 \le x \le 1$$

حيث x مقدار جهد المحرك، و R(x) درجة الحرارة بالفهرنهايت:

22 أجزئ الاقتران R(x) إلى كسور جزئية.

الحل

$$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{A}{11-7x}+\frac{B}{7-4x}$$

$$\Rightarrow \frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{A(7-4x)+B(11-7x)}{(11-7x)(7-4x)}$$

$$\Rightarrow 2000(4-3x)=A(7-4x)+B(11-7x)$$

* بعد ضرب الطرفين بـ $(7-4x)(11-7x)$:-

* عوض $x=\frac{7}{4}$:

$$2000\left(4-3\left(\frac{7}{4}\right)\right)=A\left(7-4\left(\frac{7}{4}\right)\right)+B\left(11-7\left(\frac{7}{4}\right)\right)$$

$$2000\left(4-\frac{21}{4}\right)=A(7-7)+B\left(11-\frac{49}{4}\right)$$

$$2000\left(\frac{-5}{4}\right)=\left(\frac{-5}{4}\right)B \Rightarrow B=2000$$

* عوض $x=\frac{11}{7}$:-

$$2000\left(4-3\left(\frac{11}{7}\right)\right)=A\left(7-4\left(\frac{11}{7}\right)\right)+B\left(11-7\left(\frac{11}{7}\right)\right)$$

$$2000\left(\frac{-5}{7}\right)=\left(\frac{5}{7}\right)A+B(11-11)$$

$$\therefore A=-2000$$

$$\Rightarrow \frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{-2000}{11-7x}+\frac{2000}{7-4x}$$

23 إذا كان R(x) يمثل الفرق بين اقتران أعلى درجة حرارة للعادم واقتران أقل درجة حرارة للعادم، فأجد كلاً من الاقترانين، وأستعين بالسؤال السابق في عملية الحل.

الحل نلاحظ من الفرع السابق بأن :

$$R(x)=\frac{2000}{7-4x}-\frac{2000}{11-7x}$$

وبناءً عليه سيكون :-

* إقتران أعلى درجة حرارة للعادم هو :

$$\frac{2000}{7-4x}$$

* إقتران أدنى درجة حرارة للعادم هو :-

$$\frac{2000}{11-7x}$$

24 يمثل الاقتران : $v = \frac{t^2 - 5t + 6}{(t+2)(t^2-1)}$ العلاقة بين سرعة سيارة v بالكيلومتر لكل ساعة والزمن t بالساعات. هل يمكن كتابة الاقتران v في صورة مجموع مقدارين جبريين نسبيين، مقام أحدهما $(t + 2)$، ومقام الآخر $(t^2 - 1)$؟

الحل / باستخدام الكسور الجزئية لتجزئة المقدار :-

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1}$$

$$\Rightarrow t^2-5t+6 = A(t-1)(t+1)+B(t+2)(t+1) + C(t+2)(t-1)$$

$$\Rightarrow t^2-5t+6 = A(t^2-1)+B(t+2)(t+1) + C(t+2)(t-1)$$

* نفرض $t=1$

$$\Rightarrow (1)^2-5(1)+6 = A(1)^2-1)+B(1+2)(1+1) + C(1+2)(1-1)$$

$$\Rightarrow 2 = 6B \Rightarrow B = \frac{2}{6} \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{3}}$$

* نفرض $t=-2$

$$(-2)^2-5(-2)+6 = A((-2)^2-1) + B(-2+2)(-2+1)+C(-2+2)(-2-1)$$

$$20 = 3A \Rightarrow \boxed{A=\frac{20}{3}}$$

* نفرض $t=-1$

$$(-1)^2-5(-1)+6 = A((-1)^2-1) + B(-1+2)(-1+1)+C(-1+2)(-1-1)$$

$$\Rightarrow 12 = -2C \Rightarrow \boxed{C=-6}$$

$$\Rightarrow \frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)} = \frac{\frac{20}{3}}{t+2} + \frac{\frac{1}{3}}{t-1} + \frac{-6}{t+1}$$

وحد مقامات هذين الكسرين الجزئيين

$$\Rightarrow \frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)} = \frac{\frac{20}{3}}{t+2} + \frac{\frac{1}{3}(t+1)-6(t-1)}{(t-1)(t+1)}$$

فرجه بين قوسين

$$= \frac{\frac{20}{3}}{t+2} + \frac{\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}-6t+6}{t^2-1}$$

$$= \frac{\frac{20}{3}}{t+2} + \frac{\frac{-17}{3}t+\frac{19}{3}}{t^2-1}$$

∴ يمكن كتابة الإقتران v على صورة مجموع مقدارين نسبيين مقام أحدهما $(t+2)$ ومقام الآخر (t^2-1)

مهارات التفكير العليا

تحد: أجزئ كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

25 $\dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}$

الحل ونزّع البسط على المقام:

$$\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}=\frac{x^3}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{3}{x^4}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}$$

26 $\dfrac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}$

الحل

$$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}$$

$$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)(x-2)(x-2)}=$$

$$\frac{A(x-2)^2+B(x-2)+C}{(x-2)(x-2)(x-2)}$$

* بضرب الطرفين بـ $(x-2)(x-2)(x-2)$

$$\Rightarrow 2x^2+6x-5=A(x-2)^2+B(x-2)+C$$

* نفرض $x=2$

$$2(2)^2+6(2)-5=A(2-2)^2+B(2-2)+C$$

$$\Rightarrow 15=C$$

* نفرض $x=1$ ونعوض $C=15$:

$$2(1)^2+6(1)-5=A(1-2)^2+B(1-2)+15$$

$$\Rightarrow 3=A-B+15$$

$$\Rightarrow A-B=-12 \quad ----(1)$$

* نفرض $x=0$ ونعوض $C=15$:

$$2(0)^2+6(0)-5=A(0-2)^2+B(0-2)+15$$

$$-5=4A-2B+15$$

$$\Rightarrow 4A-2B=-20 \quad ----(2)$$

نحل المعادلتين (1) و (2) بالحذف:

$$A-B=-12 \quad ----(1)$$

$$4A-2B=-20 \quad ----(2)$$

* أضرب المعادلة الأولى بـ (-2) وأجمعها مع المعادلة (2):

$$-2A+2B=24 \quad ---(1)$$

$$4A-2B=-20 \quad ---(2)$$

$$\Rightarrow 2A=4 \Rightarrow A=2$$

* عوّض $A=2$ في أي من المعادلتين:

$$2-B=-12 \quad ---(1) \Rightarrow B=14$$

$$\therefore \frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{2}{x-2}+\frac{14}{(x-2)^2}+\frac{15}{(x-2)^3}$$

27 $\dfrac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}$

الإجابة النهائية:

$$\frac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16} = \frac{17}{8(x-2)} + \frac{7}{4(x-2)^2} + \frac{7}{8(x+2)} - \frac{-17}{4(x+2)^2}$$

28 **أكتشف الخطأ:** بدأت رنيم خطوات تجزئة المقدار $\frac{5x+2}{(x+3)^2}$ كالآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+3}$$

أحدد الخطأ الذي وقعت فيه رنيم ، ثم أصححه.

الحل

الخطأ الذي وقعت فيه رنيم هو أنها جعلت مقامي الكسرين متماثلين مع العلم أنه يجب أن تجعل مقام الكسر الثاني $(x+3)^2$ تكون الخطوة الأولى صحيحة كالتالي:

$$\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}$$

29 **تبرير:** إذا كان: $\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$ ، فأجد قيمة كل من AوB بدلالة المتغيرين aوb ،ثم أبرر إجابتي.

الحل

$$\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$ بتوحيد المقامات.

$$\Rightarrow ax+b=A(x+1)+B(x-1)$$

* نفرض $x=1$

$$\Rightarrow a(1)+b=A(1+1)+B(1-1)$$

$$\Rightarrow a+b=2A \Rightarrow A=\frac{a+b}{2}$$

* نفرض $x=-1$

$$\Rightarrow a(-1)+b=A(-1+1)+B(-1-1)$$

$$-a+b=-2B \Rightarrow B=\frac{b-a}{-2}$$

30 **مسألة مفتوحة:** أكتب اقترانا نسبيا في صورة $\frac{f(x)}{g(x)}$، بحيث تحتوي مقامات كسوره الجزئية على عوامل خطية غير مكررة.

الحل

$$\frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2-4x-16}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+4}$$

أسئلة كتاب التمارين

أجزئ كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1 $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}$

2 $\dfrac{3x-5}{x(x-1)^2}$

الإجابة النهائية:

$\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)} = \frac{\frac{-11}{29}}{2x+5} + \frac{\frac{-2}{29}}{7-3x}$

توجيه: حلل البسط أولاً

الإجابة النهائية:

$\frac{3x-5}{x(x-1)^2} = \frac{-5}{x} + \frac{5}{x-1} + \frac{-2}{(x-1)^2}$

3 $\dfrac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}$

الإجابة النهائية:

$\dfrac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)} = \dfrac{-1}{2x-1} + \dfrac{x+1}{x^2+1}$

4 $\dfrac{5x-1}{2x^2-5x-3}$

الإجابة النهائية:

$\dfrac{5x-1}{2x^2-5x-3} = \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{2}{x-3}$

5 $\frac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}$

الإجابة النهائية:

$\frac{9-5x}{x^3-4x^2+3x} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-3} + \frac{-2}{x-1}$

6 $\frac{36+5x}{16-x^2}$

الإجابة النهائية:

$\frac{36+5x}{16-x^2} = \frac{7}{4-x} + \frac{2}{4-x}$

7 $\frac{8x+3}{x^2-3x}$

الإجابة النهائية:
.....

$\frac{8x+3}{x^2-3x} = \frac{-1}{x} + \frac{9}{x-3}$

8 $\frac{3x^2-2x-5}{x^3+x^2}$

الإجابة النهائية:
.....

$\frac{3x^2-2x-5}{x^3+x^2} = \frac{3}{x} + \frac{-5}{x^2}$

9 $\frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2}$

الإجابة النهائية: .....

$\frac{2x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2} = \frac{18}{x-2} + \frac{-15}{x-3} + \frac{35}{(x-3)^2}$

10 $\frac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}$

الإجابة النهائية: .....

$\frac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x} = \frac{2}{9}{x} + \frac{25}{9}{x-3} + \frac{35}{3}{(x-3)^2}$

11 $\dfrac{5x+8}{4x^3-12x^2+9x-2}$

الإجابة النهائية:

$$\frac{5x+8}{4x^3-12x^2+9x-2} = \frac{\frac{2}{9}}{x-2} + \frac{\frac{-4}{9}}{2x-1} + \frac{\frac{11}{3}}{(2x-1)^2}$$

12 $\dfrac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}$

الإجابة النهائية:

$$\frac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)} = \frac{-4x-1}{x^2+3} + \frac{1}{1-2x}$$

13 $\dfrac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)}$

$\dfrac{-6x-9}{2x^2+x+5} + \dfrac{3}{x-1}$

14 $\dfrac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5}$

$3 + \dfrac{-3}{2x+5} + \dfrac{1}{x-1}$

15 $\dfrac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2}$

الإجابة النهائية:

$x+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{-7}{x-1}$

16 أجد الاقتران النسبي الذي يمكن كتابته في صورة كسور جزئية على النحو الآتي:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

الحل وحد المقامات:-

$$\frac{2(x-1)(x+1)+(x+1)+(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{2(x^2-1)+(x+1)+(x-1)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{2x^2-2+x+1+x^2-x-x+1}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$=\frac{3x^2-x}{(x^2-2x+1)(x+1)}=\frac{3x^2-x}{x^3+x^2-2x^2-2x+x+1}$$

$$=\frac{3x^2-x}{x^3-x^2-x+1}$$

أجزئ كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

17 $\frac{ax+b}{(x-c)^2}$

الحل

$$\frac{ax+b}{(x-c)(x-c)}=\frac{A}{x-c}+\frac{B}{(x-c)^2}$$

وبتوحيد المقامات ينتج أن:-

$$\Rightarrow \frac{ax+b}{(x-c)(x-c)}=\frac{A(x-c)+B}{(x-c)(x-c)}$$

بضرب طرفي المعادلة بـ $(x-c)(x-c)$:-

$$\Rightarrow ax+b=A(x-c)+B$$

* نفرض $x=c$

$$ac+b=A(c-c)+B$$

$$ac+b=B$$

* نفرض $x=0$ ، وبتعويض $B=ac+b$:-

$$a(0)+b=A(0-c)+(ac+b)$$

$$b=-Ac+(ac+b)$$

$-(ac+b)$

$$\Rightarrow b-ac-b=-cA \Rightarrow \frac{-ac}{-c}=\frac{-cA}{-c}$$

$$\therefore A=a$$

$$\therefore \frac{ax+b}{(x-c)^2}=\frac{a}{x-c}+\frac{ac+b}{(x-c)^2}$$

18 $\dfrac{1}{x^2-ax-bx+abx}$

الحل

$$\frac{1}{x(x-a-b+ab)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-a-b+ab}$$

$$\Rightarrow 1=A(x-a-b+ab)+Bx$$

* نفرض $x=0$

$$1=A(0-a-b+ab)+B(0)$$

$$\therefore A=\frac{1}{-a-b+ab}$$

* نفرض $x=a+b-ab$

$$1=A(a+b-ab-a-b+ab)+B(a+b-ab)$$

$$\therefore B=\frac{1}{a+b-ab}$$

$$\therefore \frac{1}{x^2-ax-bx+abx}=\frac{\frac{1}{-a-b+ab}}{x}+\frac{\frac{1}{a+b-ab}}{x-a-b+ab}$$

19 $\dfrac{ax+b}{x^2-c^2}$

الحل

$$\frac{ax+b}{(x-c)(x+c)}=\frac{A}{x-c}+\frac{B}{x+c}$$

$$\Rightarrow ax+b=A(x+c)+B(x-c)$$

* بعد توحيد المقامات ثم ضرب طرفي المعادلة بـ: $\therefore (x+c)(x-c)$

* نفرض $x=c$

$$a(c)+b=A(c+c)+B(c-c)$$

$$\frac{ac+b}{2c}=\frac{2cA}{2c}\Rightarrow A=\frac{ac+b}{2c}$$

* نفرض $x=-c$

$$a(-c)+b=A(-c+c)+B(-c-c)$$

$$\frac{-ac+b}{-2c}=\frac{-2cB}{-2c}\Rightarrow B=\frac{b-ac}{2c}$$

$$\therefore \frac{ax+b}{x^2-c^2}=\frac{\frac{ac+b}{2c}}{x-c}+\frac{\frac{b-ac}{-2c}}{x+c}$$

20 أجزئ المقدار: $\frac{2}{x(x+2)}$ ، ثم أستعمل ناتج التجزئة لإيجاد المجموع الآتي:

$$\frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+\cdots+\frac{2}{11\times13}$$

الحل

$$\frac{2}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow 2=A(x+2)+Bx$$

* نفرض أن $x=0$

$$2=A(0+2)+B(0)$$

$$\frac{2}{2}=\frac{2A}{2} \quad \therefore A=1$$

* نفرض $x=-2$

$$2=A(-2+2)+B(-2)$$

$$2=-2B \quad \therefore B=-1$$

$$\therefore \frac{2}{x(x+2)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1\times3}+\frac{2}{3\times5}+\frac{2}{5\times7}+\cdots+\frac{2}{11\times13}$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\cdots$$

$$-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}$$

$$=1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$$