



رياضيات الأعمال

الصف الثاني عشر - المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

12

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

يوسف سليمان جرادات

هبة ماهر التميمي

إبراهيم عقلة القادري

نور محمد حسان

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 ✉ P.O.Box: 2088 Amman 11941

📘 @nccdjor 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج في جلسته رقم (2025/4)، تاريخ 2025/5/6 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2025/120)، تاريخ 2025/6/17 م، بدءاً من العام الدراسي 2025 / 2026 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2025.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 787 - 4

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2025/1/368)

بيانات الفهرسة الأولية للكتاب:

عنوان الكتاب	رياضيات الأعمال، كتاب الطالب: الصف الثاني عشر المسار الأكاديمي، الفصل الدراسي الأول
إعداد / هيئة	الأردن، المركز الوطني لتطوير المناهج
بيانات النشر	عمان: المركز الوطني لتطوير المناهج، 2025
رقم التصنيف	373.19
الوصفات	/ تدريس الرياضيات / أساليب التدريس / المناهج / التعليم الثانوي /
الطبعة	الطبعة الأولى
يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.	

التحكيم التربوي: أ. د. خالد محمد أبو اللوم

التحكيم العلمي: أ. د. محمد صبح صبابحة

التحرير اللغوي: نضال أحمد موسى

التصميم الجرافيكي: راكان محمد السعدي

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

المقدمة

انطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون مُعِيناً للطلبة على الارتقاء بمستواهم المعرفي والمهاري، ومجارة الأقران في الدول المتقدمة. ولما كان مبحث الرياضيات من أهم المباحث الدراسية التي تُنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات في مختلف الحقول، فقد أولى المركز مناهجه عنايةً كبيرةً، وأعدّها وفق أفضل الطرائق المُتبَّعة عالمياً على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات الطلبة.

روعي في إعداد كتاب رياضيات الأعمال أكثر الموضوعات الرياضية أهميةً واستخدماً في تخصّصات إدارة الأعمال؛ بُغْيَةً إعداد طلبة حقل الأعمال لدراسة أيّ من هذه التخصّصات في المرحلة الجامعية إعداداً جيّداً يتواءم مع مناهج الدول المتقدمة. روعي في إعداد الكتاب أيضاً اشتماله على مستوى معرفي ومستوى مهاري مناسبين لطلبة الحقول جميعاً في حال اختار هؤلاء الطلبة دراسة مادة هذا الكتاب. وكذلك حُرِص على تقديم هذه الموضوعات بطريقة بنائية مُتدرّجة تتيح للطلبة فرصة تعلّمها بعمق من دون عناء أو جهد كبيرين.

روعي أيضاً تقديم الموضوعات بطريقة مُنظمة، وجاذبة، ومُدعمة بتمثيلات بيانية، ومزوّدة بإرشادات تُعين الطلبة على مواصلة تعلّمهم بسلاسة من دون تعثر؛ فهي تُذكّرهم بالخبرات التعليمية التي اكتسبوها سابقاً، وتساعدهم على ربط الموضوعات الجديدة بعضها ببعض ربطاً وثيقاً، إضافةً إلى صلة كثير من أمثلتها ومسائلها بسياقات إدارة الأعمال التي تُحفّز الطلبة على تعلّم الرياضيات بشغف، وتجعله ذا معنى.

ولأنّ كثرة تدرب الطلبة على حلّ المسائل نهجٌ ناجعٌ في ترسيخ المفاهيم الرياضية لديهم وتعزيز طاقاتهم الإجرائية؛ فقد تضمّن كتابا الطالب والتمارين عدداً كافياً من التدريبات؛ بهدف توثيق علاقة الطلبة بالكتاب المدرسي، بوصفه مرجعاً موثقاً ورصيناً يغنيهم عن البحث عن آية مراجع أو مصادر إضافية، ويُحقّق العدالة في التعلّم.

ونحن إذ نُقدّم هذا الكتاب، نُؤمّل أن ينال إعجاب طلبتنا وأعضاء الهيئات التدريسية والتعليمية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعدّ بأن نستمرّ في تطويره في ضوء ما يصلنا من ملاحظات سديدة.

المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمة المحتويات

6.....	الوحدة 1 المصفوفات
8.....	الدرس 1 مُقدِّمة في المصفوفات
16.....	الدرس 2 العمليات على المصفوفات
24.....	الدرس 3 ضرب المصفوفات
34.....	الدرس 4 المُحدِّدات وقاعدة كريمر
43.....	الدرس 5 النظرير الضربي للمصفوفة
54.....	اختبار نهاية الوحدة



قائمة المحتويات

الوحدة ② الخوارزميات ونظرية المخططات 56

الدرس 1 الخوارزميات 58

الدرس 2 خوارزميات تعبئة الصندوق 68

الدرس 3 المخططات 83

الدرس 4 أنواع خاصة من المخططات 95

الدرس 5 مخططات أولر 107

اختبار نهاية الوحدة 116

الوحدة ③ البرمجة الخطية 120

الدرس 1 حل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً 122

معمل برمجية جيوجبرا تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً 130

الدرس 2 البرمجة الخطية 132

اختبار نهاية الوحدة 139

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَدُّ المصفوفات من المفاهيم الأساسية في الرياضيات، وهي ترتبط ارتباطاً وثيقاً بمختلف المجالات الرياضية وتطبيقاتها العملية. وقد شهدت السنوات الأخيرة اهتماماً ملحوظاً بالمصفوفات، لا سيَّما بعد استعمالها في عمليات التخزين والتحليل للبيانات الضخمة التي تُشكِّلُ العمود الفقري لكلِّ من الذكاء الاصطناعي، وإنترنت الأشياء، والتشفير (علم تأمين المعلومات وإخفائها). كذلك تُمثِّلُ المصفوفات أدوات أساسية في مهن إدارة الأعمال، مثل التسويق؛ إذ تُسَهِّمُ في تحليل بيانات الحملات والمحاسبة، بما يساعد على إدارة البيانات المالية وتفسيرها بفعالية.

تعلّمتُ سابقًا:

- ✓ تبسيط مقادير عددية.
- ✓ خصائص العمليات على الأعداد الحقيقية.
- ✓ حلّ معادلات خطية بمتغير واحد.
- ✓ حلّ أنظمة معادلات خطية بمتغيرين بالحذف والتعويض.
- ✓ حلّ معادلات تربيعية بمتغير واحد.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ مفهوم المصفوفة، وعناصرها، ورتبتها، وأنواعها.
- ◀ جمع المصفوفات، وطرحها، وضربها في عدد ثابت، وضرب مصفوفة في أخرى.
- ◀ إيجاد مُحدّدات مصفوفات مُربّعة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- ◀ حلّ أنظمة معادلات خطية بمتغيرين باستعمال قاعدة كرامر والنظير الضربي لمصفوفة المعاملات.
- ◀ إيجاد النظير الضربي لمصفوفة مُربّعة من الرتبة الثانية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (10 – 6) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

مُقَدِّمة في المصفوفات Introduction to Matrices

- تعرّف المصفوفات، ورتبها، وعناصرها.
- تعرّف أنواع خاصة من المصفوفات.
- تنظيم البيانات في مصفوفة لتسهيل عملية تحليلها.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



المصفوفة، الرتبة، العنصر، مصفوفة صف، مصفوفة عمود، المصفوفة المُرَبَّعة، المصفوفة الصفرية، المصفوفتان المُتساويتان.



سُئِلَت الأُسَرُ في مدينتين عن مصدر التدفئة الذي تستعمله في فصل الشتاء، ثم سُجِّلَت النتائج في الجدول المجاور الذي يُبين عدد الأُسَر التي تستعمل كل مصدر. كيف يُمكن عرض بيانات الجدول بصورة أخرى مُختصرة؟

	الغاز	الكهرباء	الكاز	أخرى
المدينة A	3256	1678	4589	1253
المدينة B	4560	978	5874	2564

المصفوفة: عناصرها، ورتبتها

المصفوفة (matrix) هي ترتيب على هيئة مستطيل لأعداد أو مُتغيّرات في صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين من النوع الآتي: [].

تُسمّى كل قيمة في المصفوفة **عنصرًا** (element)، ويُرمز إلى المصفوفة بحروف كبيرة، مثل: $A, B, C, \dots$ ، ويُرمز إلى عناصرها بحروف صغيرة، مثل: $a, b, c, \dots$. يُستدلّ على العنصر في المصفوفة بموقعه الذي يُحدّده كلٌّ من الصف والعمود الذي يقع فيه العنصر، ويُكتب رقم الصف أولاً ثم رقم العمود إلى يمين رمز العنصر من الأسفل، فيُرمز مثلاً إلى العنصر الواقع في الصف 4 والعمود 2 في المصفوفة A بالرمز a_{42} .

معلومة

يعود تاريخ المصفوفات إلى العصور القديمة، لكنّ مصطلح (المصفوفة) ظهر عام 1850 م. أمّا كلمة (matrix) فهي لاتينية، ولها معاني عديدة، منها: المكان الذي يتشكّل فيه الشيء أو يتولّد.

يوجد العنصر 6 في الصف 4 والعمود 2، ويُرمز إليه بالرمز a_{42} .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 12 & 5 & 29 \\ 17 & 0 & 11 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 12 & 5 & 29 \\ 17 & 0 & 11 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} \text{4 صفوف} \\ \text{3 أعمدة} \end{array}$$

يُمكن وصف المصفوفة **برتبتها** (order)؛ فالمصفوفة التي تحوي 3 صفوف و4 أعمدة يقال إنها مصفوفة من الرتبة 3×4

بوجه عام، إذا حوت المصفوفة m من الصفوف، و n من الأعمدة، فإنها تكون مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، ويساوي عدد عناصرها ناتج ضرب العددين m ، و n .

لغة الرياضيات

تُقرأ رتبة المصفوفة $m \times n$ على النحو الآتي: m في n .

مثال 1

أستعمل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

1 ما رتبة المصفوفة A ؟

بما أن المصفوفة A تحوي 3 صفوف، وعمودين، فإن رتبتها هي: 3×2

2 ما قيمة كل من العنصر a_{32} والعنصر a_{12} ؟

• بما أن العنصر a_{32} موجود في الصف 3 والعمود 2، فإن قيمته هي: 4

• بما أن العنصر a_{12} موجود في الصف 1 والعمود 2، فإن قيمته هي: 5

3 أين يقع العنصر الذي قيمته -1 ؟

يقع العنصر الذي قيمته -1 في الصف 2 والعمود 1، ويُرمز إليه بالرمز a_{21} .

رموز رياضية

يُستعمل الرمز $A_{3 \times 2}$ للدلالة على المصفوفة A التي رتبتها 3×2

لغة الرياضيات

يُستعمل مصطلح (مُدخلات) أيضاً للتعبير عن عناصر المصفوفة.

إرشاد

رتبة المصفوفة $m \times n$ هي تعبير، وليست عملية ضرب. فمثلاً، إذا كانت رتبة المصفوفة 3×2 ، فإن ذلك لا يعني ضرب هذين العددين بحيث يكون الناتج 6

أتحقق من فهمي

أستعمل المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

(a) ما رتبة المصفوفة B ؟

(b) ما قيمة كل من العنصر b_{24} والعنصر b_{13} ؟

(c) أين يقع العنصر الذي قيمته -3 ؟

أنواع خاصة من المصفوفات

توجد أسماء خاصة ببعض المصفوفات؛ فالمصفوفة التي تتكوّن فقط من صف واحد وعدد من الأعمدة تُسمّى **مصفوفة صف** (row matrix)، مثل المصفوفة: $A = [2 \quad -4 \quad 0 \quad 7]$.

أمّا المصفوفة التي تتكوّن من عمود واحد وعدّة صفوف تُسمّى **مصفوفة عمود** (column matrix)، مثل المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.

وأمّا المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة تُسمّى **المصفوفة المربعة** (square matrix)، مثل المصفوفة: $C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

وأمّا المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفاراً تُسمّى **المصفوفة الصفرية** (zero matrix)،

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ مثل المصفوفة:}$$

المصفوفتان المتساويتان (equal matrices) هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها، وعناصرهما المتناظرة متساوية.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ المصفوفتان غير متساويتين؛ لاختلاف رتبيتهما.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ المصفوفتان غير متساويتين؛ لعدم تساوي جميع العناصر المتناظرة فيهما.}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ المصفوفتان متساويتان؛ لأنهما من الرتبة نفسها، وعناصرهما المتناظرة متساوية.}$$

يُمكن استعمال مفهوم تساوي المصفوفات لإيجاد قيم عناصر مجهولة في مصفوفتين متساويتين.

أتعلّم

المصفوفة $A = [a]$ هي مصفوفة صف وعمود.

أتعلّم

يُمكن القول إنّ المصفوفة C مربعة من الرتبة 3

أتعلّم

العناصر المتناظرة في مصفوفتين هي العناصر التي تقع في الصف والعمود نفسيهما. فمثلاً، إذا كانت المصفوفة A والمصفوفة B متساويتين، فإنّ العنصر a_{ij} في المصفوفة A يُناظر العنصر b_{ij} في المصفوفة B .

مثال 2

أحدّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

أفكر

أذكر مثالاً على مصفوفة
مربعة صفريّة.

1 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

المصفوفة A مصفوفة مربعة، ورتبتها هي: 2×2

2 $B = [4 \ 5 \ 7]$

المصفوفة B مصفوفة صف، ورتبتها هي: 1×3

3 $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$

المصفوفة C مصفوفة عمود، ورتبتها هي: 4×1

4 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 3y+10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ y & 1 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كلّ من x و y .

$$x + 1 = 10$$

$$x = 9$$

$$3y + 10 = y$$

$$2y + 10 = 0$$

$$2y = -10$$

$$y = -5$$

عنصران متناظران في مصفوفتين متساويتين

بطرح 1 من طرفي المعادلة

عنصران متناظران في مصفوفتين متساويتين

بطرح y من طرفي المعادلة

بطرح 10 من طرفي المعادلة

بقسمة طرفي المعادلة على 2

إذن: $x = 9$ و $y = -5$.

أتحقق من فهمي

أحدّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

a) $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

b) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $F = [-4 \ 0 \ -2 \ 1 \ 0]$

d) إذا كانت: $\begin{bmatrix} 3x-2 & 8 \\ 2 & 2x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كلّ من x و y .

تنظيم البيانات في المصفوفات وتحليلها

إنَّ تنظيم البيانات في مصفوفة يُسهِّل عملية تفسيرها وتحليلها. وقد يُقدِّم مجموع البيانات في صف أو عمود معلومة ذات معنى في بعض المسائل.

مثال 3 : من الحياة

الصف الدراسي	العمر (year)	الكتلة (kg)	الطول (cm)
هديل	10	38	135
هبة	14	50	155
لانا	12	45	145

بيانات: يُبيِّن الجدول المجاور الأطوال والكتل والأعمار والصفوف الدراسية للشقيقات الثلاث هديل وهبة ولانا في إحدى المدارس:

1 أرَّتب هذه البيانات في مصفوفة رتبها 4×3 ، بحيث يُمثِّل الطول والكتلة والعمر والصف الدراسي صفوف المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 135 & 155 & 145 \\ 38 & 50 & 45 \\ 10 & 14 & 12 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

أفكّر

أعيد كتابة المصفوفة بحيث تكون الكتل مُرتَّبة ترتيباً تنازلياً.

2 أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبين ما يُمثِّله هذا المجموع (إنَّ كان له معنى).
مجموع عناصر الصف الأوَّل هو 435، وهذا المجموع يُمثِّل مجموع أطوال الشقيقات الثلاث.

3 أجد مجموع عناصر الصف الرابع، ثمَّ أُبين ما يُمثِّله هذا المجموع (إنَّ كان له معنى).
مجموع عناصر الصف الرابع هو 20، وهذا المجموع لا يُمثِّل شيئاً ذا معنى.

أتذكّر

الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي ناتج جمع القيم مقسوماً على عددها.

4 هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر الصف الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أبرِّر إجابتي.
نعم؛ لأنَّه يدلُّ على الوسط الحسابي لكتل الشقيقات الثلاث.

أنتحقق من فهمي

	مُؤَيِّد	مُعَارِض	مُحَايِد
A القرية	800	130	70
B القرية	460	250	40
C القرية	1300	700	200

سياحة: يُبيِّن الجدول المجاور نتائج استطلاع آراء عيَّات من سُكَّان ثلاث قرى متجاورة بخصوص مشروع سياحي يُراد إقامته في موقع يتوسَّط هذه القرى:

- (a) أرَّتب هذه البيانات في مصفوفة صفوفها القرى؛ على أن يكون عدد المؤيِّدين مُرتَّباً ترتيباً تصاعدياً.
- (b) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إن كان له معنى).
- (c) أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إن كان له معنى).
- (d) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر العمود الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أبرِّر إجابتي.

أَتدَرَّب وَأُحَلِّ المسائل

أُحدِّد رتبة كل مصفوفة ممَّا يأتي:

1 [6 10]

2 $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$

4 [10]

إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كل عنصر ممَّا يأتي:

5 a_{31}

6 a_{23}

7 a_{14}

8 أُحدِّد موقع العنصر الذي قيمته 8 في المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

أُحدّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

9 $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

10 $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

11 $[0 \ 3 \ 5 \ 2]$

12 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+2y & 4 \\ 3x-11 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كل من x ، و y ، و z .

14 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 9 & x^2 \\ 2-y & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2x+3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كل من x ، و y .

	الأهداف	التسديدات	المباريات
سمير	7	15	8
أحمد	13	25	11
فواز	9	20	14



رياضة: يُبيّن الجدول المجاور إنجازات ثلاثة من لاعبي كرة القدم في مباريات دوري الصفوف في إحدى المدارس:

15 أنظّم هذه البيانات في المصفوفة S ، بحيث تحوي صفوفها إنجازات اللاعبين الثلاثة، ويُرتّب فيها عدد الأهداف تنازلياً، ثمّ أجد قيمة العنصر s_{32} .

16 أجد مجموع عناصر الصف الثاني، ثمّ أبيّن ما يمثّله هذا المجموع (إنّ كان له معنى).

17 أجد مجموع عناصر العمود الثالث، ثمّ أبيّن ما يمثّله هذا المجموع (إنّ كان له معنى).



كهربائيات: تتوزع 3 مستودعات لإحدى وكالات تجارة الأجهزة الكهربائية في 3 مدن. يوجد في مستودع المدينة الأولى 200 ثلاجة، و380 غسالة، و250 شاشة، و300 مروحة، ويوجد في مستودع المدينة الثانية 160 ثلاجة، و540 غسالة، و290 مروحة، ويوجد في مستودع المدينة الثالثة 120 ثلاجة، و280 غسالة، و400 شاشة، و470 مروحة:

18 أنظم هذه البيانات في مصفوفة تمثل أعمدها أنواع الأجهزة الكهربائية، ثم أحدد رتبة المصفوفة الناتجة.

19 أجمع عناصر كل صف، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع (إن كان له معنى).

20 أجمع عناصر كل عمود، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع (إن كان له معنى).

21 أحل المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا



22 **تبرير:** أبين إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة أبداً، ثم أبرر إجابتي.

إذا كان للمصفوفة A والمصفوفة B العدد نفسه من العناصر، فإن $A = B$.

23 **مسألة مفتوحة:** أنشئ مصفوفة مربعة من الرتبة 3، وأسميها A ، بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$ ، لكل i, j .

24 **تبرير:** إذا كان عدد عناصر المصفوفة B عدداً أولياً، فماذا يمكن أن تكون رتبته؟ أبرر إجابتي.

إرشاد: العدد الأولي هو عدد أكبر من 1، وله عاملان فقط، هما: العدد 1، ونفسه.

25 **تبرير:** إذا كانت المسافة بين إربد وعمّان 88 km، والمسافة بين عمّان والعقبة 324 km، والمسافة بين إربد والعقبة

408 km، فأنشئ مصفوفة رتبته 3×3 لتمثيل المسافات بين المدن الثلاث، ثم أبرر إجابتي.

26 **تحذّر:** أكتب المصفوفة B ، حيث: $b_{ij} = 2i - j$ لكل $i \in \{1, 2, 3\}$ ، ولكل $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

27 **تحذّر:** أجد قيمة كل من x ، و y ، و z إذا كانت: $\begin{bmatrix} x+2y & x-y \\ x+y+3z & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

الدرس 2

العمليات على المصفوفات Operations on Matrices

- جمع المصفوفات، وطرحها، وضربها في عدد ثابت.
- تعرّف خصائص العمليات على المصفوفات.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



تُمثّل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$ أسعار البيع (بالدينار) لثلاثة مشروبات (شاي، قهوة، عصير) بأكواب صغيرة وأخرى كبيرة في أحد الأكشاك. وقد قرّر صاحب الكشك رفع الأسعار بما نسبته 20% نظرًا إلى زيادة التكاليف. ما المصفوفة التي تُمثّل الأسعار الجديدة؟

جمع المصفوفات وطرحها

يُمكن جمع مصفوفتين (adding two matrices) أو طرحهما (subtracting two matrices) إذا وفقط إذا كانت لهما الرتبة نفسها، وذلك بجمع العناصر المُتناظرة في المصفوفتين في حالة الجمع، وطرح هذه العناصر في حالة الطرح.

جمع المصفوفات وطرحها

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان A, B مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ ، فإن $A + B$ مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، وكل عنصر فيها هو مجموع العنصرين اللذين يُناظرانه في هاتين المصفوفتين. وبالمثل، فإن $A - B$ مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، وكل عنصر فيها يساوي ناتج طرح العنصرين المُناظرين له في المصفوفة A والمصفوفة B .

بالرموز: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ ، فإن:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال 1

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$

فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إن أمكن):

1 $A + C$

بما أنّ A و C من الرتبة نفسها (الرتبة 2×3)، فإنّه يُمكن جمعهما.

$$\begin{aligned} A + C &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} && \text{بالتعويض} \\ &= \begin{bmatrix} 2+3 & 4+(-1) & 6+2 \\ -1+4 & -5+7 & 4+6 \end{bmatrix} && \text{بجمع العناصر المتناظرة} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أتعلّم

إذا كان: $Z = X + Y$

فإنّ: $z_{ij} = x_{ij} + y_{ij}$

2 $A + B$

بما أنّ A , B من رتبتين مختلفتين، فلا يُمكن جمعهما.

3 $B - D$

بما أنّ B و D من الرتبة نفسها (الرتبة 3×2)، فإنّه يُمكن إيجاد $B - D$.

$$\begin{aligned} B - D &= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} && \text{بالتعويض} \\ &= \begin{bmatrix} 5-2 & -2-4 \\ 3-5 & 0-3 \\ -7-(-9) & 6-1 \end{bmatrix} && \text{بطرح العناصر المتناظرة} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} && \text{بالتبسيط} \end{aligned}$$

أتحقّق من فهمي

أستعمل المصفوفات الواردة في المثال 1 لإيجاد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إن أمكن):

a) $C - A$

b) $D + B$

c) $C + D$

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

عند ضرب المصفوفة في عدد ثابت (scalar multiplication)، فإن ذلك يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد الثابت.

أتعلم

تعلمت سابقاً أن الضرب في عدد صحيح موجب هو جمع مُتكرّر؛ فإذا كان A مصفوفة، فإن $3A$ يُكافئ $A+A+A$.

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كان A مصفوفة رتبها $m \times n$ ، وكان k عدداً ثابتاً، فإن kA مصفوفة رتبها $m \times n$ ، وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروباً في k .

بالرموز: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ، وكان k عدداً ثابتاً، فإن:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال 2

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ، فأجد $5C$

$$5C = 5 \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 5(-2) & 5(7) \\ 5(3) & 5(4) \\ 5(6) & 5(5) \end{bmatrix}$$

بضرب كل عنصر في العدد 5

$$= \begin{bmatrix} -10 & 35 \\ 15 & 20 \\ 30 & 25 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي

إذا كان: $D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

a) $3D$

b) $-2D$

c) $1.5D$

خصائص العمليات على المصفوفات

إنَّ أغلب خصائص العمليات على الأعداد الحقيقية تكون أيضًا صحيحة على المصفوفات. وفي ما يأتي ملخص لهذه الخصائص.

خصائص العمليات على المصفوفات

مفهوم أساسي

إذا كان A, B, C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها، وكان k, h عددين حقيقيين، فإن:

1. $A + B = B + A$

الخاصية التبديلية لجمع المصفوفات

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات

3. $k(A + B) = kA + kB$

خاصية توزيع الضرب في ثابت

يمكن إجراء عمليات متعددة الخطوات على المصفوفات، ويكون ترتيب هذه العمليات مشابهًا لترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية.

أذكر

المسألة المتعددة الخطوات هي مسألة تحتاج إلى أكثر من عملية رياضية لحلها، مثل: الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة.

مثال 3

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$ ، فأجد $3A + 2B - 5C$.

$3A + 2B - 5C = 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$ بالتعويض

$= \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) \\ 3(4) & 3(3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(0) & 2(8) \\ 2(12) & 2(5) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5(4) & 5(7) \\ 5(-8) & 5(1) \end{bmatrix}$ بضرب كل عنصر في الثابت

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 24 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 35 \\ -40 & 5 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

$$= \begin{bmatrix} 3 + 0 - 20 & 6 + 16 - 35 \\ 12 + 24 - (-40) & 9 + 10 - 5 \end{bmatrix}$$

بجمع العناصر المُتناظرة وطرحها

$$= \begin{bmatrix} -17 & -13 \\ 76 & 14 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

أتذكر

أُجري العمليات الحسابية بحسب أولويات العمليات.

أتحقق من فهمي

إذا كان: $E = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$, $G = [3 \ 0 \ 7]$, $H = [6 \ -4 \ 9]$, فأجد كلاً مما يأتي (إن أمكن):

a) $4E - 3F$

b) $2G + 6F$

c) $5(G + H)$

يُمكن استعمال العمليات على المصفوفات لحلّ مسائل حياتية.

مثال 4 : من الحياة



تجارة: لدى إحدى الشركات التجارية فرعان في مدينة عمّان، وفرعان آخران في مدينة إربد. إذا مثّلت المصفوفة A والمصفوفة B مُعدّل المبيعات والأرباح اليومية من الأدوات الكهربائية (بمئات الدنانير) في كلّ من فرعي هاتين المدينتين على الترتيب، فأجد المصفوفة C التي تُمثّل مُعدّل المبيعات والأرباح الشهرية لفروع الشركة في المدينتين معاً (بافتراض أنّ الشهر 30 يوماً).

$$A = \begin{bmatrix} \text{الأرباح} & \text{المبيعات} \\ 56 & 4 \\ 45 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{عمّان 1} \\ \text{عمّان 2} \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \text{الأرباح} & \text{المبيعات} \\ 48 & 3 \\ 66 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{إربد 1} \\ \text{إربد 2} \end{matrix}$$

الخطوة 1: أجمع المصفوفة A والمصفوفة B .

$$A + B = \begin{bmatrix} 56 & 4 \\ 45 & 3.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 48 & 3 \\ 66 & 9 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 104 & 7 \\ 111 & 12.5 \end{bmatrix}$$

بجمع العناصر المُتناظرة

الخطوة 2: أضرب المصفوفة الناتجة من الفرع السابق في 30 (بافتراض أن الشهر 30 يومًا).

$$C = 30(A + B) = 30 \begin{bmatrix} 104 & 7 \\ 111 & 12.5 \end{bmatrix} \quad \text{بضرب } (A+B) \text{ في } 30$$

$$= \begin{bmatrix} 3120 & 210 \\ 3330 & 375 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{بضرب كل عنصر من عناصر} \\ \text{المصفوفة في } 30 \end{array}$$

إذن، المصفوفة C التي تمثل مُعدّل المبيعات والأرباح الشهرية لفروع الشركة في المدينتين

$$\text{معًا بمئات الدنانير هي: } \begin{bmatrix} 3120 & 210 \\ 3330 & 375 \end{bmatrix}$$

 **أتتحقق من فهمي**

زراعة: يملك كلٌّ من راشد وحمد مزرعة في الأغوار، ومزرعة أخرى في المفرق. إذا
مثّلت المصفوفة A مُعدّل الإنتاج اليومي (بالكيلوغرام) لمزرتيهما في الأغوار من البندورة
والباذنجان والفلفل، ومثّلت المصفوفة B مُعدّل الإنتاج اليومي (بالكيلوغرام) لمزرتيهما
في المفرق من الأصناف نفسها، فأجد المصفوفة C التي تُمثّل مُعدّل الإنتاج الأسبوعي
(بالكيلوغرام) لمزرتي راشد وحمد في الموقعين معًا.

$$A = \begin{bmatrix} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \\ 200 & 500 & 100 \\ 260 & 430 & 245 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{array}, B = \begin{bmatrix} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \\ 130 & 100 & 300 \\ 240 & 300 & 175 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{array}$$

 **أُتدرب وأحلّ المسائل**

أجد ناتج كلِّ ممّا يأتي (إن أمكن):

1 $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

2 $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

3 $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

$$5 \quad \begin{bmatrix} 25 & 10 & 13 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31 & 26 & -9 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

$$6 \quad [32 \quad -12 \quad 8] - [-6 \quad 43 \quad -7]$$

$$7 \quad 3 \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$8 \quad \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$$

$$9 \quad -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 12 & -32 \\ 9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$10 \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$11 \quad -4 \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & 10 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$12 \quad 2 \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي (إن أمكن):

$$13 \quad 4A + 3B$$

$$14 \quad 2C - 3A$$

$$15 \quad B + 1.5B$$

$$16 \quad 3B + 2C$$

$$17 \quad 2A - C$$

$$18 \quad 4A + 3C$$



19 **رياضة:** لدى محلّ تجهيزات رياضية فرع في مدينة الكرك، وفرع آخر في مدينة الطفيلة. إذا مثّلت المصفوفة A عدد البدلات الرياضية التي باعها الفرعان من جميع المقاسات (صغيرة، متوسطة، كبيرة) في شهر نيسان عام 2024 م، ومثّلت المصفوفة B عدد البدلات التي باعها الفرعان من المقاسات الثلاثة في شهر نيسان عام 2023 م، فأجد المصفوفة التي تُمثّل ما باعه كلّ من الفرعين في الشهرين معاً.

$$A = \begin{bmatrix} \text{كبير} & \text{متوسط} & \text{صغير} \\ 20 & 15 & 10 \\ 12 & 30 & 17 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{matrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \text{كبير} & \text{متوسط} & \text{صغير} \\ 18 & 42 & 23 \\ 20 & 25 & 21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{matrix}$$

	مقاعد	طاوولات	أجهزة حاسوب
المختبر A	30	20	15
المختبر B	40	25	20

20 **مدارس:** يُبين الجدول المجاور محتويات مختبري

الحاسوب في إحدى المدارس عام 2024 م.

تُخطط إدارة المدرسة لزيادة هذه المحتويات بما

نسبته 40%. أكتب مصفوفة تُمثل ما يجب شراؤه

للمختبرين، ومصفوفة أخرى تُمثل محتويات المختبرين بعد عملية الشراء.

21 أجد قيمة كل من x ، y ، و z التي تُحقّق المعادلة الآتية:

$$2 \begin{bmatrix} x & 3 \\ 6 & y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x & 6 \\ z & -2 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} z & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

22 أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

23 **تبرير:** أضحّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحياناً، أو صحيحة دائماً، أو غير صحيحة أبداً، ثمّ أبرّر إجابتي:

إذا كان عدد عناصر المصفوفة A مساوياً لعدد عناصر المصفوفة B ، فإنّه يُمكن إيجاد $A + B$.

24 **أكتشف الخطأ:** ما الخطأ في الحلّ الآتي:

$$\times \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

25 **مسألة مفتوحة:** أكتب المصفوفتين A ، B ، بحيث يكون: $3A + 2B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix}$

26 **تحّد:** أجد المصفوفتين X ، Y اللتين تُحقّقان المعادلتين الآتيتين:

$$X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}, 3X + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

الدرس 3

ضرب المصفوفات Multiplying Matrices

فكرة الدرس

- إيجاد ناتج ضرب مصفوفتين.
- تعرّف خصائص ضرب المصفوفات.

مسألة اليوم

حجم الكوب	كبير	متوسط	صغير
عبر شبكة الإنترنت	5	4	2
من المتجر	3	5	9

دوّنت سلمى في الجدول المجاور عدد ما باعتها في متجرها من أكواب حافظة للحرارة مُتعدّدة الحجم (كبيرة، متوسط، صغيرة) في أحد الأيام. كذلك دوّنت طريقة بيع هذه الأكواب؛

وهي إمّا مباشرة من المتجر، وإمّا عبر شبكة الإنترنت. إذا كان سعر الكوب الكبير JD 4.5، وسعر الكوب المتوسط JD 4، وسعر الكوب الصغير JD 3.5، فكيف يُمكن استعمال ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الذي حصلت عليه سلمى من بيع الأكواب بكلتا طريقتي البيع؟

شروط ضرب المصفوفات

يُمكن ضرب مصفوفتين إذا فقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى مُساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية. وعند ضرب المصفوفة A التي رتبها $m \times n$ في المصفوفة B التي رتبها $n \times r$ فإنّ رتبة المصفوفة الناتجة $A \times B$ هي: $m \times r$.

$$\begin{array}{ccc} A & \times & B \\ m \times n & & n \times r \\ \uparrow & \text{مُساويان} & \uparrow \\ & \text{رتبة } AB & \end{array} = \begin{array}{c} AB \\ m \times r \end{array}$$

رموز رياضية

يُمكن استعمال أيّ رمز ممّا يأتي للدلالة على ضرب المصفوفة A في المصفوفة B :
 $A \times B, AB$

مثال 1

إذا كانت $A_{2 \times 3}$ ، وكانت $B_{2 \times 2}$ ، وكانت $C_{3 \times 2}$ ، فأبَيّن إذا كانت عملية الضرب في كلّ ممّا يأتي مُمكنة أم لا. وإنّ كانت كذلك، أحمّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

1 AB

$$\begin{array}{ccc} A & \times & B \\ 2 \times 3 & & 2 \times 2 \\ \uparrow & \text{غير مُساويين} & \uparrow \end{array}$$

بما أنّ عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإنّه لا يُمكن إيجاد $A \times B$.

2 AC

$$\begin{array}{c} A \quad \times \quad C \\ \begin{array}{cc} 2 \times 3 & 3 \times 2 \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{مُتساويان} \\ \uparrow & \uparrow \\ A \times C \text{ رتبة} \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} A \times C \\ 2 \times 2 \end{array}$$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة C ، فإنَّه يُمكن إيجاد AC ، وتكون رتبتهما: 2×2

أتحقّق من فهمي

إذا كانت $A_{2 \times 2}$ وكانت $B_{3 \times 2}$ ، فأبَيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلِّ ممَّا يأتي مُمكنة أم لا. وإنَّ كانت كذلك، أحرِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

a) AB

b) BC

c) CA

أفكّر

متى يُمكن ضرب مصفوفة في نفسها؟

ضرب المصفوفات

تختلف عملية ضرب مصفوفتين عن عمليتي جمعهما وطرحهما؛ إذ لا تُضرب العناصر المُتناظرة في بعضها كما في عمليتي جمع المصفوفات وطرحها.

ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي

بالكلمات:

إذا كان A مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، وكان B مصفوفة من الرتبة $n \times p$ ، فإنَّ العنصر الواقع في الصف i والعمود j في المصفوفة $A \times B$ يساوي مجموع نواتج ضرب عناصر الصف i من المصفوفة A في العناصر المُناظرة لها في العمود j من المصفوفة B .

بالرموز:

$$\text{إذا كان: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \text{ فإن:}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix} \text{ حيث: } c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

مثال 2

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ ، وكان: $B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأجد: AB .

الخطوة 1:

أتحقق من إمكانية عملية الضرب.

رتبة المصفوفة A هي 2×3 ، ورتبة المصفوفة B هي 3×2 . وبما أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإنه يُمكن إيجاد المصفوفة AB ، وتكون رتبتهما: 2×2 .

الخطوة 2:

أضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة A في عناصر العمود الأول من المصفوفة B بالترتيب، ثم أجمع النواتج، ثم أدون النتيجة في الصف الأول والعمود الأول من المصفوفة AB .

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 4 + (-5) \times 0 + 4 \times 2 & \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 3:

أضرب عناصر الصف الأول من المصفوفة A في عناصر العمود الثاني من المصفوفة B بالترتيب، ثم أجمع النواتج، ثم أدون النتيجة في الصف الأول والعمود الثاني من المصفوفة AB .

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \times (-5) + (-5) \times (-1) + 4 \times 0 \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4:

أضرب عناصر الصف الثاني من المصفوفة A في عناصر العمود الأول من المصفوفة B بالترتيب، ثم أجمع النواتج، ثم أدون النتيجة في الصف الثاني والعمود الأول من المصفوفة AB .

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & 0 \\ -3 \times 4 + 4 \times 0 + 7 \times 2 & \end{bmatrix}$$

الخطوة 5:

أضرب عناصر الصف الثاني من المصفوفة A في عناصر العمود الثاني من المصفوفة B بالترتيب، ثم أجمع النواتج، ثم أدون النتيجة في الصف الثاني والعمود الثاني من المصفوفة AB .

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 2 & -3 \times (-5) + 4 \times (-1) + 7 \times 0 \end{bmatrix}$$

إذن، المصفوفة AB الناتجة هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

أتحقق من فهمي

(a) إذا كان: $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، وكان: $N = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ ، فأجد: MN .

(b) إذا كان: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، وكان: $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، فأجد: CD .

أشاهد المقطع المرئي
(الفديو) في الرمز الآتي:



إرشاد

يُمكن دمج الخطوات
(1-4) معاً، ثم كتابة
نتيجة الضرب مباشرة
من دون وصف العمليات
كما في المثال الثالث
والمثال الرابع.

يُمكن استعمال ضرب المصفوفات في مواقف حياتية مُتعددة.

مثال 3: من الحياة



شطرنج: تنافست ثلاث فرق في البطولة النهائية
لنادي الشطرنج، وقد دُون عدد مرّات الفوز
والتعادل لهذه الفرق في الجدول المجاور. إذا
علمتُ أن فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني
حصوله على 3 نقاط، وأنّ تعادله يعني حصوله
على نقطة واحدة، فأستعمل المصفوفات في
إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل
A	5	4
B	6	3
C	4	5

معلومة



أمكن لجهاز الحاسوب
عام 1997م تحقيق إنجاز
تاريخي، تمثل في هزيمته
بطل العالم في لعبة الشطرنج
غاري كاسباروف. وقد شكّل
هذا الحدث نقطة تحوّل في
حقول الذكاء الاصطناعي،
وأظهر كيف يُمكن لأجهزة
الحاسوب أن تتفوّق على
العقل البشري.

الخطوة 1: أكتب مصفوفة لكل من النتائج والنقاط.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة النتائج مصفوفة النقاط

الخطوة 2: أضرب مصفوفة النتائج في مصفوفة النقاط.

$$MN = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بتعويض المصفوفة M ، والمصفوفة N

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 3 + 4 \times 1 \\ 6 \times 3 + 3 \times 1 \\ 4 \times 3 + 5 \times 1 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفتين

$$= \begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 17 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

إذن، تُمثّل $\begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 17 \end{bmatrix}$ مصفوفة النقاط التي حصل عليها كل فريق؛ ما يعني أنّ الفريق A أحرز

19 نقطة، والفريق B أحرز 21 نقطة، والفريق C أحرز 17 نقطة.

ومن ثَمَّ، فإنّ الفريق B هو الفريق الفائز؛ لأنّه حصل على أكبر عدد من النقاط.

أتحقق من فهمي

الفريق	ربح	تعادل	خسارة
A	1	0	3
B	3	1	0
C	1	1	2

كرة قدم: يُبيّن الجدول المجاور نتائج 3 فرق لكرة القدم بعدما لعب كلّ منها 4 مباريات. إذا علّمت أنّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقاط، وأنّ تعادله يعني حصوله على نقطة واحدة، وأنّ خسارته تعني عدم حصوله على أيّ نقاط، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

خصائص ضرب المصفوفات

يُحقَّق ضرب المصفوفات بعض خصائص ضرب الأعداد الحقيقية. وفي ما يأتي بعض خصائص الضرب التي تتحقَّق في المصفوفات.

خصائص ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي

تُعَدُّ الخصائص الآتية صحيحة لأيِّ ثلاث مصفوفات: R, S, T ، وأيِّ عدد حقيقي c ؛ شرط أن تكون عمليتا الجمع والضرب مُعرَّفتين في جميع الحالات الآتية:

1. $(RS)T = R(ST)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات
2. $c(RS) = (cR)S = R(cS)$ خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد حقيقي
3. $R(S + T) = RS + RT$ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليسار
4. $(R + S)T = RT + ST$ خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليمين

أتعلَّم

الخاصية التبديلية لا تتحقَّق في ضرب المصفوفات؛ أيَّ إنَّ: $BA \neq AB$ حيث A و B مصفوفتان. بالرغم من ذلك، فقد توجد حالات خاصة لمصفوفتين A و B تكون فيها $AB = BA$.

مثال 4

إذا كان: $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ، وكان: $k = 3$ ، فأجد كلاً ممَّا يأتي:

1 $P(Q + R)$

$$P(Q+R) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{array}{l} \text{بتعويض المصفوفات} \\ P, Q, \text{ و } R \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{بجمع المصفوفة } Q, \text{ والمصفوفة } R$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{بضرب المصفوفة الناتجة في} \\ \text{المصفوفة } P, \text{ والتبسيط} \end{array}$$

أتعلَّم

أُعيد حلَّ الفرع 1 من المثال 4 بطريقة أخرى، ثمَّ أُفَارِن بين الإجابتين.

2 $k(PQ)$

$$k(PQ) = 3 \times \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \quad \begin{array}{l} \text{بتعويض المصفوفة } P, \\ \text{والمصفوفة } Q, \text{ والثابت } k \end{array}$$

$$= 3 \times \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{بضرب المصفوفة } Q, \text{ والمصفوفة } R$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 24 \\ 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{بضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة الناتجة في 3}$$

أتعلم

أعيد حلّ الفرع 2 من المثال 4 بطريقة أخرى، ثمّ أقرّن بين الإجابتين.

3 $(PQ)R$

$$(PQ)R = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{بتعويض المصفوفات } P, \\ Q, \text{ و } R \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{بضرب المصفوفة } Q, \text{ والمصفوفة } P$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & -4 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{بضرب المصفوفة الناتجة في المصفوفة } R, \text{ والتبسيط}$$

أفكر

هل $PQ = QP$ ؟ أبرّر إجابتي.

أتحقق من فهمي

إذا كان: $F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، فأجد كلاً

مما يأتي:

a) $(F+G)H$

b) $(FG)H$

c) $G(mH)$



إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & -1.5 & -1 \\ 0.5 & 0 & 2 \\ 1.5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ فأيُّهن إذا كانت

عملية الضرب في كلِّ ممَّا يأتي مُمكنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أحرِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

1 AB

2 BC

3 DC

4 BA

5 CD

6 BB

7 CB

8 BCD

9 إذا كان: $AB = C$ ، وكانت رتبة المصفوفة A هي: 4×3 ، ورتبة المصفوفة C هي: 4×5 ، فما رتبة المصفوفة B ؟

أجد ناتج كلِّ ممَّا يأتي (إنْ أمكن):

10 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \times [2 \ 5 \ 3]$

12 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

14 $[8 \ 10 \ -7] \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$

15 $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

16 $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \times [-1 \ 4]$

17 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

18 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right)^2$

19 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^2$

إرشاد: إذا كان A مصفوفة، وكان n عددًا صحيحًا موجبًا، فإنَّ A^n مصفوفة تُعبَّر عن ضرب A في نفسها n مرَّة.

	الطراز X	الطراز D	الطراز R
المدينة A	12	10	0
المدينة B	4	4	20
المدينة C	8	9	12

20 صناعة سيّارات: تتوزّع 3 مصانع لإحدى شركات صناعة

السيّارات في 3 مدن، ويبيّن الجدول المجاور عدد ما

يُنتجه كل مصنع يوميًا من 3 طرازات للسيّارات. إذا كان

ربح الشركة في كل سيّارة من الطراز X هو JD1000، ومن

الطراز D هو JD 2000، ومن الطراز R هو JD1500، فأستعمل ضرب المصفوفات في إيجاد ربح كل مصنع يوميًا

من جميع طرازات السيّارات (بافتراض أنّ جميع السيّارات المُنتجة مبيّعة).

21 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ ، فأبيّن أنّ: $AB = AC$.

إذا كان: $P = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $R = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

22 $(QR)P$

23 $n(PQ)$

24 $R(PQ)$

25 $(nR)P$

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ x & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ y & 4 \end{bmatrix}$ ، حيث x, y عدنان صحيحان موجبان، فأجد:

26 AB بدلالة x, y .

27 BA بدلالة x, y .

28 أصغر قيمة صحيحة موجبة لكلّ من x و y التي تجعل $AB = BA$.

29 **مُكسَّرات:** يُعبئ مَحْمَص خليطاً من المُكسَّرات والفواكه المُجفَّفة في نوعين من الأكياس كما في الجدول الأيسر، ويُبين الجدول الأيمن عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في الغرام الواحد من المُكسَّرات والفواكه المُجفَّفة. أَسْمَل ضرب المصفوفات لإيجاد عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في كل نوع.

	مُكسَّرات (g)	فواكه مُجفَّفة (g)
الكيس 1	150	150
الكيس 2	200	100

	بروتين	كربوهيدرات	دهون
مُكسَّرات	20	21	52
فواكه مُجفَّفة	3	65	1

30 أحل المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

31 **أكتشف الخطأ:** حَسَبْتُ كُلَّ من رنا وعبير العنصر c_{23} في المصفوفة: $C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \\ 11 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ كما يأتي:

إجابة رنا

$$c_{23} = -8 - 18 + 20 = -6$$

إجابة عبير

$$c_{23} = 12 - 8 - 18 = -14$$

أيُّهما إجابتهما صحيحة؟ أبرر إجابتي.

32 **تبرير:** إذا كان A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة n ، فلماذا $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$ ؟

33 **مسألة مفتوحة:** أكتب المصفوفتين A, B غير الصفريتين، بحيث يكون $AB = BA$.

34 **تحذُّ:** أجد قيمة كُلِّ من e, f, g, h التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

المُحدِّدات وقاعدة كريمر Determinants and Cramer's Rule

- حساب مُحدِّدات مصفوفات مُربَّعة من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.
- حساب مساحة مُثلث عُلِّمت إحداثيات رؤوسه باستعمال المُحدِّدات.
- استعمال قاعدة كريمر لحل أنظمة مُكوَّنة من معادلتين خطيتين بمُتغيَّرين.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



المُحدِّد، القُطر الرئيس، مُحدِّد الدرجة الثانية، مُحدِّد الدرجة الثالثة، مصفوفة المعاملات، قاعدة كريمر.



يُطلق اسم المُثلث الذهبي على واحدة من أهمِّ الوجْهات السياحية في جنوب الأردن، وهي المنطقة التي تضمُّ مدينة العقبة ومدينة البترا ووادي رم. إذا كانت إحداثيات المناطق الثلاث على خريطة للمملكة في مستوى إحداثي، وحدته 1 km، هي: (0, 0) للعقبة، و(56, 116) للبترا، و(6, 50) ل وادي رم، فاستعمل المُحدِّدات لحساب مساحة المُثلث الذي رؤوسه هذه المواقع الثلاثة.

المُحدِّدات

أتعلَّم

للمُحدِّد استعمالات عدَّة في الجبر والهندسة؛ إذ تُستعمل في حل أنظمة المعادلات الخطية، وحساب مساحة بعض الأشكال الهندسية.

المُحدِّد (determinant) للمصفوفة المُرَبَّعة A هي عدد حقيقي يرتبط بالمصفوفة A ، ويُرمز إليه بالرمز $|A|$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 9 & 8 & 10 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

القُطر الرئيس

يُطلق على مجموعة العناصر المُمتدَّة من الزاوية اليسرى العلوية إلى الزاوية اليمنى السفلية في المصفوفة اسم **القُطر الرئيس** للمصفوفة (main diagonal).

للقُطر الرئيس دور أساسي في إيجاد مُحدِّد مصفوفة من أيِّ رتبة. وفي ما يأتي طريقة إيجاد مُحدِّد المصفوفة ذات الرتبة 2×2 ، أو ما يُسمَّى **مُحدِّد الدرجة الثانية** (second order determinant).

مُحدّدة الدرجة الثانية

مفهوم أساسي

بالكلمات: يُرمز إلى مُحدّدة المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ، وتساوي قيمتها ناتج ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحًا منه ناتج ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

مثال 1

أجد قيمة كلٍّ من المُحدّدات الآتية:

أتذكّر

أُجري العمليات الحسابية بحسب أولويات العمليات.

1 $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8 \times 5 - 2 \times 6 \\ = 28$$

باستعمال مُحدّدة الدرجة الثانية

بالتبسيط

2 $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -2 \times 8 - (-1) \times 7 \\ = -9$$

باستعمال مُحدّدة الدرجة الثانية

بالتبسيط

3 $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times 6 - (-2) \times 3 \\ = 0$$

باستعمال مُحدّدة الدرجة الثانية

بالتبسيط

أتحقّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من المُحدّدات الآتية:

a) $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$

يُطلَق على مُحدَّدة المصفوفة ذات الرتبة 3×3 اسم **مُحدَّدة الدرجة الثالثة** (third order determinant)، ويُمكن حساب قيمتها بطريقتين كما هو مُبيَّن أدناه.

مُحدَّدة الدرجة الثالثة

مفهوم أساسي

يُمكن إيجاد مُحدَّدة المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ باستعمال الطريقتين الآتيتين:

الطريقة 1: باستعمال قاعدة الأقطار.

الخطوة 1: أُعيد كتابة العمود الأوَّل والعمود الثاني على يمين المُحدَّدة.

الخطوة 2: أجد ناتج ضرب عناصر القطر الرئيس، وثلاثيات العناصر على المُوازيات الحمراء المُبيَّنة، ثمَّ أجد مجموعها الكلي.

الخطوة 3: أجد ناتج ضرب عناصر القطر الآخر، وثلاثيات العناصر على المُوازيات الزرقاء المُبيَّنة، ثمَّ أجد مجموعها الكلي.

الخطوة 4: أجد قيمة المُحدَّدة بطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2.

الطريقة 2: باستعمال مُحدَّدة المصفوفة 2×2

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

مثال 2

أجد قيمة $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ باستعمال قاعدة الأقطار، ثمَّ باستعمال مُحدَّدة المصفوفة 2×2

الطريقة 1: باستعمال قاعدة الأقطار.

الخطوة 1: أُعيد كتابة العمود الأوَّل والعمود الثاني على يمين المُحدَّدة.

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

أتعلَّم

مفهوم (المُحدَّدات) هو مفهوم واسع يرتبط بالمصفوفات المُرَبَّعة من أيِّ رتبة. وفي هذا الكتاب، سيقصر الحديث فقط على مُحدَّدات المصفوفات من الرتبة الثانية والرتبة الثالثة.

أتعلَّم

يُمكن إيجاد $|A|$ باستعمال صيغ أخرى، منها:

$$|A| = -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$|A| = g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - h \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$|A| = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

الخطوة 2: أجد ناتج ضرب عناصر الأقطار ومُوازياتها.

$$-4 \times 5 \times 3 = -60$$

$$6 \times 5 \times 1 = 30$$

$$3 \times 1 \times 1 = 3$$

$$-4 \times 1 \times 6 = -24$$

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

$$3 \times 6 \times 3 = 54$$

الخطوة 3: أجد مجموع نواتج الضرب في كل مجموعة.

$$-60 + 3 + 216 = 159$$

$$30 + (-24) + 54 = 60$$

الخطوة 4: أجد قيمة المُحدّدة بطرح المجموع الثاني من المجموع الأوّل.

$$159 - 60 = 99$$

إذن، قيمة هذه المُحدّدة هي: 99

الطريقة 2: باستعمال مُحدّدة المصفوفة 2×2

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = (-4) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

باستعمال مُحدّدة
الدرجة الثالثة

$$= -4(15-6) - 3(18-1) + 6(36-5)$$

باستعمال مُحدّدة
الدرجة الثانية

$$= 99$$

بالتبسيط

إذن، قيمة هذه المُحدّدة هي: 99

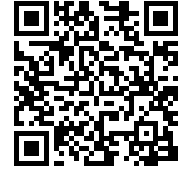
أتحقّق من فهمي

أجد قيمة كل مُحدّدة ممّا يأتي باستعمال قاعدة الأقطار، ثمّ باستعمال مُحدّدة المصفوفة 2×2 :

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

أشاهد المقطع المرئي
(الفديو) في الرمز الآتي:



أفكّر

أعيد حلّ المسألة
باستعمال مُحدّدة
المصفوفة 2×2 ، وذلك
باختيار عناصر الصف
الثاني، ثمّ أقارن بين
الإنجابتين.

حساب مساحة المثلث باستعمال المُحدِّدات

يُمكن حساب مساحة مُثلث عُلِّمت إحداثيات رؤوسه في المستوى الإحداثي باستعمال القاعدة الآتية.

مساحة مُثلث مرسوم في المستوى الإحداثي باستعمال المُحدِّدات

مفهوم أساسي

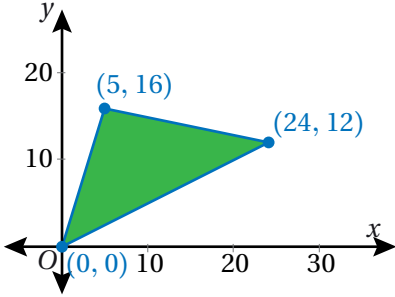
مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه: $X(x_1, y_1)$, $Y(x_2, y_2)$, $Z(x_3, y_3)$ هي نصف القيمة المطلقة للعدد A ، حيث:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

إرشاد

تُستعمل القيمة المطلقة للعدد A ؛ لأنَّ المساحة لا تكون سالبة.

مثال 3 : من الحياة



خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مُخطَّط لجزيرة على شكل مُثلث. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تُمثِّل 1 km، فأجد مساحة الجزيرة.

الخطوة 1: أجد قيمة المقدار A .

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 16 & 1 \\ 24 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

بتعويض

$$x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 24$$

$$y_1 = 0, y_2 = 16, y_3 = 12$$

$$= 0(16-12) - 0(5-24) + 1(60-384)$$

باستعمال مُحدِّدة الدرجة الثالثة

$$= -324$$

بالتبسيط

الخطوة 2: أجد مساحة المثلث (الجزيرة).

صيغة مساحة مُثلث مرسوم في المستوى الإحداثي باستعمال المُحدِّدات

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |A|$$

أتعلَّم

لا تتأثّر مساحة المثلث باختلاف ترتيب الرؤوس في المُحدِّدة، أو بتبديل الصفوف فيها.

إرشاد

إذا كانت النقاط الثلاث على استقامة واحدة، فإنَّ $|A| = 0$.

$$= \frac{1}{2} |-324|$$

$$= 162$$

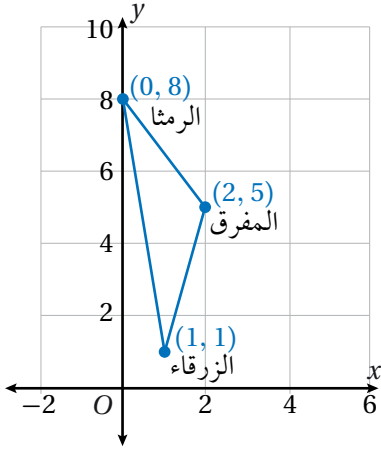
بتعويض $A = -324$

بإيجاد القيمة المطلقة، والتبسيط

إذن، مساحة هذه الجزيرة هي: 162 km^2

أتحقق من فهمي

خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور إحداثيات كلٍّ من مدينة الزرقاء، ومدينة الرمثا، ومدينة المفرق. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تُمثل 10 km ، فأجد مساحة المنطقة التي رؤوسها هذه المدن الثلاث.



أتذكر

إذا كان b عدداً حقيقياً، فإن $|b|$ هو القيمة المطلقة للعدد b . أما إذا كان B مصفوفة مربعة، فإن $|B|$ هو مُحدِّدة تلك المصفوفة.

حل أنظمة المعادلات والمُحدِّدات

يُمكن استعمال المُحدِّدات لحل أنظمة معادلات خطية بمتغيرين، كلٌّ منها مكتوب في صورة: $ax + by = c$. أنشئ أولاً مصفوفة عناصرها معاملات المتغيرين x و y ، وهي تُسمى **مصفوفة المعاملات** (coefficient matrix)، ثمَّ أحسب مُحدِّدتها؛ فإذا كانت المُحدِّدة لا تساوي صفراً، فإنَّه يوجد حلٌّ وحيد للنظام. أما إذا كانت المُحدِّدة تساوي صفراً، فإنَّه ألا يكون للنظام حلٌّ، وإما أن يكون له عدد لانهائي من الحلول. وفي حال لم تكن قيمة مُحدِّدة مصفوفة المعاملات صفراً، فيمكن استعمال **قاعدة كريمر** (Cramer's rule) لإيجاد حل النظام كما هو مبين أدناه.

قاعدة كريمر

مفهوم أساسي

إذا كان: $C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام: $a_1 x + b_1 y = c_1$ ، $a_2 x + b_2 y = c_2$

وكان: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ، حيث $D \neq 0$ ، فإنَّ حلَّ النظام هو:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

أتعلم

سُمِّيت المُحدِّدات بهذا الاسم؛ لأنَّها تُحدِّد إذا كان لنظام من المعادلات حلٌّ وحيد أم لا.

مثال 4

أحلّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كرامر (إن أمكن).

$$3x + 5y = 1$$

$$2x + y = -4$$

الخطوة 1: أجد مُحدّدة مصفوفة المعاملات.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المعاملات

$$D = |C| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

مُحدّدة مصفوفة المعاملات

$$= 3(1) - 2(5) = -7$$

بالتبسيط

بما أن $D \neq 0$ ، فإنّه يوجد حلّ وحيد لهذا النظام.

الخطوة 2: أجد حلّ النظام باستعمال قاعدة كرامر.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

قاعدة كرامر

$$= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{-7}$$

بالتعويض

$$= \frac{1(1) - (-4)(5)}{-7}$$

بحساب المُحدّدات

$$= \frac{21}{-7} = -3$$

بالتبسيط

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{-7}$$

$$= \frac{3(-4) - 2(1)}{-7}$$

$$= \frac{-14}{-7} = 2$$

إذن، حلّ النظام هو: $(-3, 2)$.

أتحقّق:

أتحقّق من صحّة الحلّ بالتعويض في نظام المعادلات.

$$2x + y = -4$$

المعادلتان الأصليتان

$$2(-3) + 2 \stackrel{?}{=} -4$$

بالتعويض

$$-6 + 2 \stackrel{?}{=} -4$$

بالضرب

$$-4 = -4 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

$$3x + 5y = 1$$

$$3(-3) + 5(2) \stackrel{?}{=} 1$$

$$-9 + 10 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

أنذكّر

تعلّمتُ سابقاً ثلاث طرائق (بيانياً، بالحذف، بالتعويض) لحلّ نظام معادلات مُكوّن من معادلات خطيّة.

أتعلّم

تتكوّن مصفوفة المعاملات من معاملات المتغيّرات عند كتابة المعادلات بالصورة القياسية، ويُمثّل كل عمود فيها معاملات أحد متغيّرات المعادلات.

إرشاد

للتحقّق من صحّة الحلّ، يجب تعويض القيم في المعادلات الأصلية جميعها.

أتحقق من فهمي

أحل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال قاعدة كرامر (إن أمكن):

a) $-2x + 7y = 12$
 $x + y = 3$

b) $4x - 3y = 29$
 $2y + 5x = -5$

أدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كل من المحددات الآتية:

1 $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

2 $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

3 $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

4 $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

أجد قيمة كل من المحددات الآتية باستعمال قاعدة الأقطار، ثم باستعمال مُحددة المصفوفة 2×2 :

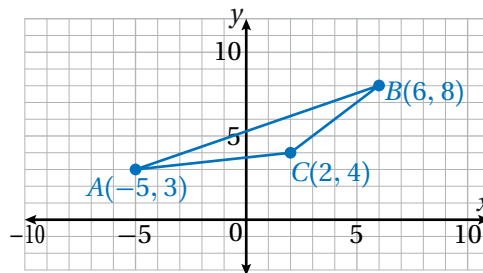
5 $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

6 $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

7 $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

8 $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

9 أجد مساحة المثلث ABC المرسوم في المستوى الإحداثي أدناه.



- 10 **خرائط:** يقع منزل خولة عند النقطة $B(3, 5)$ على خريطة إحدائية للمدينة، ويقع منزل فدوى عند النقطة $C(7, 0)$ ، ويقع منزل نُهى عند النقطة $D(5, 9)$. أجد مساحة المثلث BCD ، علماً بأنَّ الوحدة الواحدة على الخريطة تُمثل 20 m على الأرض.

أحلُّ كل نظام معادلات ممَّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنَّ أمكن):

11
$$\begin{aligned} x + 5y &= -17 \\ 3x - 4y &= 6 \end{aligned}$$

12
$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 29 \\ 6y - 4x &= 12 \end{aligned}$$

13
$$\begin{aligned} 5x - 4y &= 22 \\ 4x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

14
$$\begin{aligned} 6x - 7y &= -11 \\ 5x + 4y &= 40 \end{aligned}$$

- 15 ما قيمة c التي تجعل مُحدَّدة مصفوفة المعاملات للنظام الآتي تساوي صفراً؟

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ cy &= 3 - x \end{aligned}$$

- 16 أحلَّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2×2 تُحقِّق الشرط المُعطى في كلِّ ممَّا يأتي:

- 17 مُحدَّدتها تساوي صفراً.

- 18 مُحدَّدتها تساوي -1

- 19 جميع عناصرها أعداد موجبة، ومُحدَّدتها -12

- 20 تحدّد: عند حلِّ نظام من معادلتين مُتغيَّرتين باستعمال قاعدة كريمر، فإنَّ الحلَّ هو: $x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$ و $y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{5}$. ما قيمة كلِّ من a ، b ، و c ؟

النظير الضربي للمصفوفة

Multiplicative Inverse of Matrix

فكرة الدرس



- تعرّف مصفوفة الوحدة، والنظير الضربي للمصفوفة.
- إيجاد النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2
- كتابة معادلة مصفوفية لنظام من معادلتين خطيتين، وحلّها.

المصطلحات



مصفوفة الوحدة، مصفوفة مُنفردة، مصفوفة غير مُنفردة، المعادلة المصفوفية، النظير الضربي للمصفوفة.

مسألة اليوم



استأجر مُنظّمو رحلة بحرية في خليج العقبة 8 قوارب، بعضها يحمل 4 أشخاص، وبعضها الآخر يحمل 7 أشخاص. إذا كان عدد المشاركين في الرحلة 50 شخصًا، فأستعمل معادلة مصفوفية لإيجاد عدد القوارب المُستأجرة من كل نوع.



مصفوفة الوحدة، والنظير الضربي للمصفوفة

معلوم أن ناتج ضرب أيّ عدد حقيقي في العدد 1 هو العدد نفسه؛ إذ إن $x(1) = 1(x) = x$ لأيّ عدد حقيقي x . لذلك يُسمّى العدد 1 عنصرًا مُحيّدًا لعملية ضرب الأعداد الحقيقية.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

كذلك توجد مصفوفة مُربّعة تُسمّى **مصفوفة الوحدة** (identity matrix)، ويُرمز إليها بالرمز I ، ويكون جميع عناصر قُطرها الرئيس 1، وتكون بقيّة عناصرها أصفارًا، وتمتاز بخاصية في ضرب المصفوفات تُشبه خاصية العدد 1 في ضرب الأعداد الحقيقية.

يُمكن التحقق من أن ناتج ضرب المصفوفة I في أيّ مصفوفة مُربّعة A ، لها نفس رتبة I ، هو المصفوفة A نفسها؛ أيّ إن:

$$I \times A = A \times I = A$$

أتعلّم

- مصفوفة الوحدة من

الرتبة 2×2 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- مصفوفة الوحدة من

الرتبة 3×3 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المُحايدة لعملية ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي

بالكلمات: مصفوفة الوحدة I هي المصفوفة المُحايدة لعملية ضرب المصفوفات، التي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان ناتج الضرب هو المصفوفة الأخرى نفسها.

بالرموز: لأي مصفوفة مُربَّعة A ، لها رتبة المصفوفة المُحايدة I نفسها، فإن:

$$I \times A = A \times I = A$$

إذا كانت المصفوفتان A, B مُربَّعتين من الرتبة نفسها، وكان: $A \times B = B \times A = I$ ، فإن المصفوفة A تُسمى **نظيرًا ضربيًا** (multiplicative inverse) للمصفوفة B ، وتُسمى المصفوفة B أيضًا نظيرًا ضربيًا للمصفوفة A .

أتعلَّم

إذا كان A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة نفسها، وكان $AB = I$ ، فإن $BA = I$.

النظير الضربي للمصفوفة المُربَّعة

مفهوم أساسي

النظير الضربي للمصفوفة المُربَّعة A هو المصفوفة A^{-1} ، حيث:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

أتعلَّم

A^{-1} هو رمز للنظير الضربي للمصفوفة A ، وليس $\frac{1}{A}$.

مثال 1

أبَيِّنْ في كُلِّ مِمَّا يَأْتِي إذا كانت كل مصفوفة تُمثِّل نظيرًا ضربيًا للمصفوفة الأخرى:

$$1 \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

بتعويض المصفوفة A ، والمصفوفة B

$$= \begin{bmatrix} 2(2)+3(-1) & 2(-3)+3(2) \\ 1(2)+2(-1) & 1(-3)+2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{بضرب المصفوفتين، والتبسيط}$$

بما أن: $AB = I$ ، فإن كلاً من المصفوفة A والمصفوفة B تُمثِّل نظيرًا ضربيًا للأخرى.

أتعلَّم

إنَّ التعريف الأصلي للتحقق من أن كل مصفوفة تُمثِّل نظيرًا ضربيًا للمصفوفة الأخرى يُحتمل اختبار أن تكون $AB = I$ ، و $BA = I$. وبما أن تحقق أحد الشرطين يضمن تحقق الشرط الآخر، فإننا نكتفي فقط باختبار أحد الشرطين.

$$2 \quad F = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$$FG = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

بتعويض المصفوفة F ، والمصفوفة G

$$= \begin{bmatrix} 6(\frac{3}{4}) + 5(\frac{1}{4}) & 6(\frac{5}{8}) + 5(\frac{3}{8}) \\ 2(\frac{3}{4}) + 3(\frac{1}{4}) & 2(\frac{5}{8}) + 3(\frac{3}{8}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{4} & \frac{45}{8} \\ \frac{9}{4} & \frac{19}{8} \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفتين، والتبسيط

بما أن: $FG \neq I$ ، فإن كلاً من المصفوفة F والمصفوفة G لا تمثل نظيراً ضربياً للأخرى.

 **أتحقق من فهمي**

أبين في كلِّ ممَّا يأتي إذا كانت كل مصفوفة تُمثِّل نظيراً ضربياً للمصفوفة الأخرى:

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2.5 & 1.5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

إيجاد النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفردة من الرتبة 2×2

إذا كانت مُحددة المصفوفة تساوي صفراً، فلا نظير ضربياً لها، وتُسمَّى عندئذٍ **مصفوفة مُنفردة** (singular matrix). أمَّا المصفوفة التي مُحددها لا تساوي صفراً، فإنَّ لها نظيراً ضربياً، وتُسمَّى عندئذٍ **مصفوفة غير مُنفردة** (non-singular matrix). يُمكن إيجاد النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفردة من الرتبة 2×2 ، إذا كانت مُحددها لا تساوي صفراً كما هو مُبيَّن أدناه.

النظير الضربي لمصفوفة غير مُنفردة من الرتبة 2×2

مفهوم أساسي

بالكلمات: إذا كانت مُحددة المصفوفة A ذات الرتبة 2×2 لا تساوي صفراً، فإنَّ لها نظيراً ضربياً يُمكن إيجادُه بالتَّباع الخطوات الآتية:

1. تبديل موقع كلِّ من عنصري القطر الرئيس.

2. ضرب عنصري القطر الآخر في -1 .

3. ضرب المصفوفة الناتجة في مقلوب المُحددة، أو $(\frac{1}{|A|})$.

بالرموز: إذا كانت: $|A| \neq 0$ ، فإنَّ النظير الضربي للمصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

مثال 2

أُبَيِّن إذا كانت كل مصفوفة ممَّا يأتي مُنفردة أو غير مُنفردة، ثمَّ أجد النظير الضربي للمصفوفة غير المُنفردة:

$$1 \quad M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{vmatrix} = 3(10) - 6(5) = 30 - 30$$

باستعمال مُحدَّدة الدرجة الثانية

$$= 0$$

بالتبسيط

بما أنَّ: $|M| = 0$ ، فإنَّ المصفوفة M مُنفردة، ولا نظير ضريباً لها.

$$2 \quad F = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|F| = 4(-2) - (-3)(6) = -8 + 18$$

باستعمال مُحدَّدة الدرجة الثانية

$$= 10$$

بالتبسيط

بما أنَّ: $|F| \neq 0$ ، فإنَّ المصفوفة F غير مُنفردة، ولها نظير ضربي، هو: F^{-1} ، ويُمكن إيجادها كما يأتي:

$$F^{-1} = \frac{1}{|F|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

أتحقق من فهمي 

أُبَيِّن إذا كانت كلُّ من المصفوفات الآتية مُنفردة أو غير مُنفردة، ثمَّ أجد النظير الضربي لغير المُنفردة منها:

$$a) \quad H = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c) \quad K = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$$

أفكر

كيف يُمكنني التحقق من صحَّة إجابتي في الفرع 2 من المثال 2؟ أبرِّر إجابتي.

أفكر

ما علاقة المصفوفة K بالمصفوفة K^{-1} ؟

المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية (matrix equation) هي معادلة تتضمن مصفوفات مجهولة (أو تكون بعض عناصرها مجهولة)، ومصفوفات معلومة، إضافةً إلى عمليات على تلك المصفوفات. أمّا طريقة حل المعادلة المصفوفية: $AX = B$ فتشبه طريقة حل المعادلة: $ax = b$ ، حيث a, b, x أعداد حقيقية كما هو مبين أدناه.

معادلة مصفوفية

$$AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1} \times B \quad \text{بضرب الطرفين في } A^{-1} \text{ من اليسار}$$

$$(A^{-1} \times A)X = A^{-1} B \quad \text{خاصية التجميع}$$

$$(I)X = A^{-1} B \quad \text{خاصية النظير الضربي}$$

$$X = A^{-1} B \quad \text{خاصية الضرب في المصفوفة المُحايدة}$$

معادلة جبرية

$$ax = b$$

$$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b) \quad \text{بضرب الطرفين في } \frac{1}{a}$$

$$\left(\frac{1}{a} \times a\right)x = \frac{b}{a} \quad \text{خاصية التجميع}$$

$$(1)x = \frac{b}{a} \quad \text{خاصية النظير الضربي}$$

$$x = \frac{b}{a} \quad \text{خاصية العنصر المُحايد}$$

لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، أحولهما أولاً إلى معادلة مصفوفية صورتها: $AX = B$ ، حيث A مصفوفة معاملات المتغيرين، و X مصفوفة المتغيرات في المعادلتين الخطيتين، و B مصفوفة الثوابت، فيكون حل هذا النظام هو: $X = A^{-1} B$ ؛ شرط أن تكون المصفوفة A غير مُنفردة.

مثال 3

أحل نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

$$5x + 3y = 3$$

$$x - 2y = 11$$

الخطوة 1: أكتب المعادلة المصفوفية التي تمثل هذا النظام.

$$AX = B$$

صيغة المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

أتعلم

سيقتصر هذا الدرس على المعادلة المصفوفية التي تتضمن فقط عملية ضرب المصفوفات؛ أي المعادلة التي صورتها: $AX = B$ ، حيث A, B مصفوفتان معلومتان، و X مصفوفة مجهولة يُراد إيجادها.

أتذكر

النظير الضربي للعدد الحقيقي a هو العدد $\frac{1}{a}$ ، حيث $a \neq 0$ ، وحاصل ضرب أي عدد حقيقي في نظيره الضربي هو العدد 1، وهو العنصر المُحايد لضرب الأعداد الحقيقية.

الخطوة 2: أجد مُحدَّدة مصفوفة المعاملات.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5(-2) - 1(3)$$

باستعمال مُحدَّدة الدرجة الثانية

$$= -13$$

بالتبسيط

بما أنَّ: $|A| \neq 0$ ، فإنَّه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A .

الخطوة 3: أجد A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2

$$= \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

الخطوة 4: أحلُّ المعادلة المصفوفية باستعمال الصيغة: $X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B$$

صيغة حلَّ المعادلة المصفوفية

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفتين، والتبسيط

إذن، حلُّ هذا النظام هو: $(3, -4)$.

أتعلَّم

ألاحظ أنَّه عند حلِّ نظام المعادلات باستعمال قاعدة كرامر أو النظير الضربي، فإنَّ شرط أنَّ تكون $|A| \neq 0$ ضروري.

أنتحقق:

أتحقق من صحّة الحلّ بالتعويض في نظام المعادلات.

$$5x + 3y = 3$$

المعادلة الأصلية

$$x - 2y = 11$$

$$5(3) + 3(-4) \stackrel{?}{=} 3$$

بتعويض $x = 3, y = -4$

$$3 - 2(-4) \stackrel{?}{=} 11$$

$$15 - 12 = 3$$

بالضرب

$$3 + 8 = 11$$

$$3 = 3 \quad \checkmark$$

بالتبسيط

$$11 = 11 \quad \checkmark$$

أنتحقق من فهمي

أحلّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

$$3x - y = 13$$

$$3y - 2x = 4$$

يُمكن استعمال المعادلات المصفوفية لحلّ مسائل عملية تؤوّل إلى نظام ذي معادلتين خطيتين بمتغيّرين.

مثال 4 : من الحياة



كيمياء: يعمل يوسف في أحد مختبرات البحوث، وهو يريد تحضير 50 L من محلول حمض الهيدروكلوريك (HCL) بحيث تكون نسبة تركيزه 35%. إذا علمتُ أنّ المختبر يحوي من هذا الحمض محلولاً نسبة تركيزه 15%، ومحلولاً آخر نسبة تركيزه 40%، فكم لتراً سيستعمل يوسف من كلا المحلولين؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثّل المسألة، ثمّ أحلّها.

أفترض أن يوسف سيستعمل x لترًا تركيزها 15%، و y لترًا تركيزها 40%

الخطوة 1: أكتب نظام المعادلات الذي يُمثّل هذه المسألة.

• **المعادلة الأولى:** مجموع الكميتين هو 50 L. إذن، المعادلة التي تُعبّر عن ذلك هي:

$$x + y = 50$$

• **المعادلة الثانية:** كمية الحمض في x لترًا مضافًا إليها كمية الحمض في y لترًا تساوي كمية الحمض في 50 L. إذن، المعادلة التي تُعبّر عن ذلك هي:

$$0.15x + 0.40y = 17.5$$

إذن، نظام المعادلات الذي يُعبّر عن هذه المسألة هو:

$$x + y = 50$$

$$0.15x + 0.40y = 17.5$$

الخطوة 2: أكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثّل هذا النظام.

$$AX = B$$

صيغة المعادلة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.15 & 0.40 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 17.5 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

الخطوة 3: أجد مُحدّدة مصفوفة المعاملات.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.15 & 0.40 \end{vmatrix} = 1(0.40) - 1(0.15)$$

باستعمال مُحدّدة الدرجة الثانية

$$= \frac{1}{4}$$

بالتبسيط

بما أن: $|A| \neq 0$ ، فإنّه يوجد نظير ضربّي للمصفوفة A .

إرشاد

كمية الحمض الموجودة

في 50 L هي:

$$50 \times 35\% = 17.5$$

الخطوة 4: أجد النظير الضربي A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2

$$= \frac{1}{\frac{1}{4}} \begin{bmatrix} 0.40 & -1 \\ -0.15 & 1 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 1.6 & -4 \\ -0.6 & 4 \end{bmatrix}$$

بالتبسيط

الخطوة 5: أحل المعادلة المصفوفية باستعمال الصيغة: $X = A^{-1} B$.

$$X = A^{-1} B$$

صيغة حل المعادلة المصفوفية

$$= \begin{bmatrix} 1.6 & -4 \\ -0.6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 50 \\ 17.5 \end{bmatrix}$$

بالتعويض

$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix}$$

بضرب المصفوفتين، والتبسيط

إذن، الحل هو $(10, 40)$ ؛ أي إن يوسف سيستعمل 10 L من المحلول الذي تركيزه 15%، و 40 L من المحلول الذي تركيزه 40% لتحقيق هدفه.

أتحقق من فهمي



طهي: يوجد في معمل للحلويات محلولان، تركيز السُّكَّر في أحدهما 12%، وتركيزه في الآخر 20%. يريد الطاهي تحضير 20 L من محلول، تركيز السُّكَّر فيه 15%. كم لترًا سيستعمل الطاهي من كلا المحلولين المتوافرين في المعمل؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثل المسألة، ثم أحلّها.



أُبَيِّنُ فِي كُلِّ مِمَّا يَأْتِي إِذَا كَانَتْ كُلُّ مَصْفُوفَةٍ تُمَثِّلُ نَظِيرًا ضَرْبِيًّا لِلْمَصْفُوفَةِ الْآخَرَى:

1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2 $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

3 $L = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

4 $G = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$

أُبَيِّنُ إِذَا كَانَتْ كُلُّ مِنَ الْمَصْفُوفَاتِ الْآتِيَةِ مُنْفَرِدَةً أَوْ غَيْرَ مُنْفَرِدَةٍ، ثُمَّ أَجِدُ النَظِيرَ الضَرْبِيَّ لِغَيْرِ الْمُنْفَرِدَةِ مِنْهَا:

5 $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

7 $S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

8 $V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

أُحِلُّ كُلًّا مِنْ أَنْظِمَةِ الْمَعَادَلَاتِ الْآتِيَةِ بِاسْتِعْمَالِ النَظِيرِ الضَرْبِيِّ (إِنْ أَمَكُنْ):

9 $3x + 5y = 13$
 $x - 2y = -3$

10 $-2x + 4y = 6$
 $x + 2y = 7$

11 $5x - 8y = 31$
 $2y - 3x = -13$

12 $x + y = 20$
 $x - 2y = -1$

13 $3x + 2y = 8$
 $x = y + 1$

14 $2x + 7y = 24$
 $4x + 13y = 46$

15 **صيدلة:** لدى صيدلي محللولان، تركيز الملح في أحدهما 2%، وتركيزه في الآخر 12%. يريد الصيدلي تحضير 10 L من محلول، تركيز الملح فيه 10%. ما المعادلة المصفوفية التي يتعين استعمالها لتحضير الكمية المطلوبة من المحلول؟ أكتب معادلة مصفوفية تمثل المسألة، ثم أحلها.



- 16 أوراق نقدية: مع سعاد مجموعة من الأوراق النقدية من فئة 10 JD، وفئة 20 JD، تبلغ قيمتها الإجمالية 750 JD. إذا علمت أن عدد أوراق فئة العشرين ديناراً يقل عن مثلي عدد أوراق فئة عشرة الدينانير بمقدار 5 أوراق، فأكتب معادلة مصفوفية تمثل المسألة، ثم أحلها لإيجاد عدد أوراق النقد التي مع سعاد من كلتا الفئتين.

17 ما قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مُنفردة؟

18 ما قيمة a التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ نظيراً ضربياً لنفسها؟

19 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة C ، بحيث يكون: $(B + C)^{-1} = A$.

20 إذا كان A مصفوفة من الرتبة 2×2 ، حيث: $A^2 = 2A - 3I$ ، فأثبت أن: $A^3 = A - 6I$.

21 أحل المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

22 تبرير: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، وكانت: $a > 0, d > 0, b < 0, c < 0, |A| \neq 0$ ، فهل توجد عناصر سالبة في A^{-1} ؟ أبرر إجابتي.

23 برهان: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، وكان: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فأثبت أن: $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

24 أكتشف المختلف: أي المصفوفات الآتية مختلفة؟ أبرر إجابتي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

25 تحد: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة B التي تُحقق المعادلة: $BA^2 = A$.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل ممّا يأتي:

1 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 15 & -8 & 0 \\ 9 & 22 & -4 \\ -3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ فإن $a_{21} + a_{32}$ يساوي:

a) 15 b) -12

c) 5 d) -2

2 إذا كانت $A_{3 \times 2}$ وكانت $B_{2 \times 4}$ وكانت $C_{3 \times 2}$ فإن العملية التي يمكن إيجادها هي:

a) $A + B$ b) $B + C$

c) $5B - 3C$ d) $(A+C)B$

3 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 4 & x \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y & 2 \\ 4 & z \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & x-z \end{bmatrix}$ فإن قيمة $(x + y + z)$ تساوي:

a) 10 b) 19

c) 21 d) 26

4 إذا كانت: $\begin{bmatrix} -8 & x \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة مُنفردة، فإن قيمة x تساوي:

a) -8 b) -12

c) 6 d) -26

5 إذا كان: $C = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 9 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ فإن قيمة العنصر c_{23} تساوي:

a) 39 b) 22

c) 25 d) 27

6 إذا كانت $L_{3 \times 4}$ وكانت $M_{5 \times 3}$ وكانت $N_{2 \times 5}$ فإن رتبة المصفوفة T ، حيث: $T = NML$ هي:

a) 2×3 b) 3×5

c) 3×4 d) 2×4

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a-3 & -2 \\ 2 & a+2 \end{bmatrix}$ حيث a عدد ثابت، فأجيب عن

الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

7 أجد مُحددة A بدلالة a .

8 أجد قيم a التي تجعل المصفوفة A مُنفردة.

9 أجد A^{-1} عندما $a = 3$.

إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

فأجد كلاً ممّا يأتي $C = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ (إن أمكن):

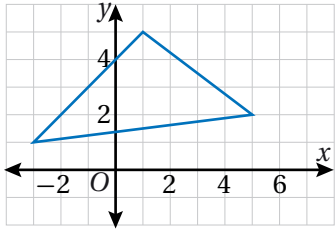
10 $C(B+D)$

11 AB

12 $B+C$

13 $2B - 3C$

20 أجد مساحة المثلث الآتي باستعمال المُحدِّدات.



21 أحلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كرامر:

$$3x - 2y = 8$$

$$5x + 3y = 13$$

22 أحلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي:

$$x - 5y = 14$$

$$3x - 8y = 28$$

23 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ، حيث a عدد ثابت

لا يساوي 2، وكان: $B + B^{-1} = I$ ، فأجد قيمة a .

24 **كيمياء:** لدى عائشة 3 محاليل حمضية، تركيز الحمض في المحلول الأول 10%، وتركيزه في المحلول الثاني 20%، وتركيزه في المحلول الثالث 40%. أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحلُّها لإيجاد الكميات التي يتعيَّن على عائشة مزجها من المحاليل الثلاثة للحصول على 100 mL من محلول حمضي نسبة تركيزه 18%، علماً بأنَّ الكمية التي سُسْتَعْمَل من المحلول الذي تركيزه 10% تساوي أربعة أمثال ما سُسْتَعْمَل من المحلول الذي تركيزه 40%.

14 أجد: $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ -2 & 11 & 9 \end{vmatrix}$

15 يُبيِّن الجدول التالي توزيع سُكَّان إحدى البلدات (بالآلاف) بحسب فئات العمر والجنس. أنظِّم هذه البيانات في مصفوفة صفوفها فئات الأعمار، ثمَّ أحرِّد رتبته.

العمر	الذكور	الإناث
0 – 19	71	66
20 – 39	68	59
40 – 59	32	22
60 فأكثر	11	14

16 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة x التي

تجعل $AB = BA$.

17 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ ، فأجد قيمة كلِّ من الثابت k

والثابت h اللذين يجعلان $A^2 + kI = hA$.

18 إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

فأجد $BA - 2C^2$.

19 أحلُّ المعادلة: $2X - \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

ما أهمية هذه الوحدة؟

تؤدي الخوارزميات ونظرية المخططات دورًا مهمًا في تخصصات الأعمال الحديثة؛ إذ تزود كل منهما أصحاب الأعمال المتخصصين بالأدوات اللازمة لفهم الأنظمة المعقدة، وتحفزهم إلى الابتكار، وتمكنهم من الحفاظ على ميزة تنافسية في أسواق اليوم الديناميكية. فمثلاً، تساعد نظرية المخططات الشركات على النمذجة وتحليل سلاسل التوريد وعلاقات العملاء؛ ما يتيح للشركات تخصيص الموارد بكفاءة، واتخاذ القرارات الاستراتيجية. في مقابل ذلك، تُعزز الخوارزميات عمليات التنبؤ والأتمتة؛ ما يمكن الشركات من التكيف بسرعة مع تغيرات السوق.



تعلّمتُ سابقًا:

- ✓ إيجاد الوسط الحسابي لبيانات مفردة.
- ✓ المصفوفات: مفهومها، وعناصرها، ورتبتها، وأنواعها، وكيفية تنظيم البيانات فيها.
- ✓ حلّ المسألة باستعمال استراتيجية التخمين والتحقّق.
- ✓ حلّ المعادلات الخطيّة بمُتغيّر واحد.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ الخوارزميات، وتطبيقها.
- ◀ خوارزميات تعبئة الصندوق، واستعمالها لإيجاد الحلّ الأمثل لمسألة تعبئة.
- ◀ المُخطّط، ومُكوّناته، وبعض التعريفات الأساسية المُتعلّقة به، وبعض أنواعه الخاصة.
- ◀ مصفوفة الجوار، ومصفوفة الوزن، واستعمالهما للتعبير عن الروابط في المُخطّطات.
- ◀ تحديد إذا كان المُخطّط المُعطى أويلريًا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحتين (20) و(21) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الخوارزميات Algorithm

فكرة الدرس

- تعرّف خوارزميات مُعطاة بالكلمات والرموز، وتطبيقها.
- تعرّف خوارزمية مُخطّط سَيْر العمليات، وتطبيقها.

المصطلحات

الخوارزمية، الطريقة شبه الرمزية، جدول التتبع، مُخطّطات سَيْر العمليات.

مسألة اليوم

كيف يُمكن التعبير بطريقة مُنظمة عن خطوات ضرب أيّ عدد من ثلاث منازل في أيّ عدد من منزلة واحدة؟ هل توجد أكثر من طريقة لذلك؟

$$\begin{array}{r} 13 \\ 325 \\ \times 6 \\ \hline 1950 \end{array}$$

الخوارزميات المكتوبة بالكلمات

تعلّمتُ في مبحث المهارات الرقمية أنّ **الخوارزمية** (algorithm) مجموعة من التعليمات أو الخطوات المُنظمة التي تُحدّد كيفية حلّ مشكلة مُعيّنة. كذلك تعلّمتُ العديد من الخوارزميات في مبحث الرياضيات، مثل ضرب عددين يتكوّن كلّ منهما من منزلتين، أو جمع كسرين غير مُتشابهين، أو إيجاد الوسيط لمجموعة من البيانات.

توجد طرائق عدّة لكتابة الخوارزمية، منها طريقة الكلمات؛ وهي وصف للخوارزمية بجمل (خطوات) مُتسلسلة من دون استعمال أيّ رموز في هذه الجمل. ويُبيّن المثال الآتي كيف يُمكن تطبيق خوارزمية مكتوبة بالكلمات.

أتعلّم

تطبيق الخوارزمية يعني تتبّع خطواتها واحدة تلو الأخرى على مُدخل ما.

مثال 1

تُستعمل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد يقبل القسمة على 11 أم لا:

1. أجمع الأرقام التي في المواضع الفردية من العدد.
2. أجمع الأرقام التي في المواضع الزوجية من العدد.
3. أجد الفرق المُطلَق بين المجموعين في الخطوتين السابقتين.
4. إذا كان الفرق المُطلَق 0 أو يقبل القسمة على 11، فإنّ العدد يقبل القسمة على 11، وإلاّ فإنّه لا يقبل القسمة على 11.

أتذكّر

الفرق المُطلَق يعني طرح العدد الأصغر من العدد الأكبر.

أطبّق الخوارزمية السابقة لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل القسمة على 11 أم لا:

أتعلّم

العدد 86416 هو
المُدخلة التي تُطبّق عليها
الخوارزمية.

1 86416

1. $6 + 4 + 8 = 18$

أجمع الأرقام التي في المواضع الفردية

2. $1 + 6 = 7$

أجمع الأرقام التي في المواضع الزوجية

3. $18 - 7 = 11$

أجد الفرق المُطلَق

يقبل العدد 86416 القسمة على 11؛ لأنّ العدد 11 (الفرق المُطلَق بين المجموعين) يقبل
القسمة على 11

2 78532

1. $2 + 5 + 7 = 14$

أجمع الأرقام التي في المواضع الفردية

2. $3 + 8 = 11$

أجمع الأرقام التي في المواضع الزوجية

3. $14 - 11 = 3$

أجد الفرق المُطلَق

لا يقبل العدد 78532 القسمة على 11؛ لأنّ العدد 3 (الفرق المُطلَق بين المجموعين) لا يقبل
القسمة على 11

أتحقّق من فهمي

أطبّق الخوارزمية الواردة في المثال 1 لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل القسمة على 11 أم لا:

a) 9768

b) 734852

الخوارزميات المكتوبة بطريقة شبه رمزية

تُكتب الخوارزمية أيضًا باستعمال **الطريقة شبه الرمزية** (pseudocode)، وفيها توصف
الخوارزمية بخطوات مُتسلسلة مُرقّمة تتضمّن العديد من الرموز. غير أنّ تتبّع الخوارزمية
المكتوبة بهذه الطريقة يكون صعبًا في بعض الأحيان، ويحتاج إلى تنظيم؛ لذا يُمكن استعمال
جدول التتبّع (trace table) لتدوين القيمة الناتجة من كل خطوة أثناء تطبيق الخوارزمية.

أذكّر

تُعَدُّ الطريقة شبه الرمزية
في كتابة الخوارزميات
سهلة ومناسبة لأغلب
الخوارزميات.

مثال 2

أتأمل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه الرمزية، ثم أُجيب عن كلِّ ممَّا يأتي:

1. Let $n = 1, A = 1$
2. Print A
3. Let $B = A + 2$
4. Print B
5. Let $n = n + 1, A = B$
6. If $n < 4$, go to step 3
7. If $n = 4$, Stop

أتعلَّم

لإنشاء جدول تتبُّع لخوارزمية شبه رمزية، فإنني أضع عمودًا لكل مُتغيِّر ورد ذكره في الخوارزمية، إضافةً إلى عمود رقم الخطوة، وعمود نواتج الأمر (Print).

أطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرجاتها.

step	n	A	B	Print
1	1	1		
2				1
3			3	
4				3
5	2	3		
6→3			5	
4				5
5	3	5		
6→3			7	
4				7
5	4	7		
6→7	Stop			

مُخرجات الخوارزمية هي: 1, 3, 5, 7

أتعلَّم

إنَّ ما كُتِبَ في الخطوة الخامسة من هذه الخوارزمية لا يُعدُّ معادلة، وإنَّما يُمثِّل تعليمات. فمثلاً: $n = n + 1$ تعني إضافة 1 إلى قيمة n من الخطوة السابقة، في حين تعني $A = B$ أنَّ قيمة A تساوي القيمة الحالية لـ B .

أتعلَّم

مُخرجات الخوارزمية هي المُخرجات الناتجة من الأمر (Print).

أَصِف مُخرجات الخوارزمية.

تُمثِّل مُخرجات الخوارزمية الأعداد الفردية الموجبة التي تقلُّ عن العدد 9

أتحقق من فهمي

أتأمل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه الرمزية، ثم أجيب عن كل مما يأتي:

1. Let $n = 1, A = 1, B = n + A$
2. Print B
3. Let $C = B + 2$
4. Print C
5. Let $n = n + 1, B = C$
6. If $n < 5$, go to step 3
7. If $n = 5$, Stop

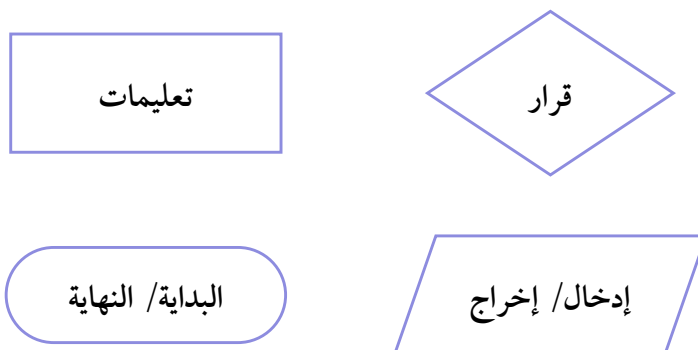
(a) أطبق الخوارزمية باستعمال جدول التتبع لإيجاد مخرجاتها.

(b) أصف مخرجات الخوارزمية.

الخوارزميات المُمثلة بمخططات سير العمليات

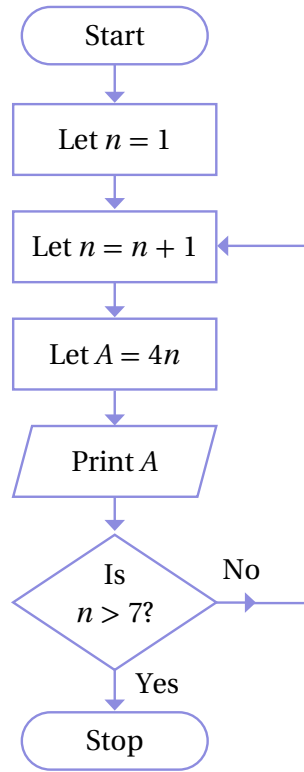
يُمكن أيضًا تمثيل الخوارزمية باستعمال **مخطط سير العمليات** (flow chart)؛ وهو مخطط يتكوّن من أشكال هندسية مُرتبطة بأسهم وخطوط تصف خطوات الخوارزمية وسير العمليات فيها.

بوجه عام، تُستعمل الأشكال (الصناديق) الآتية للدلالة على خطوات مُحدّدة في الخوارزمية:



مثال 3

أتأمل الخوارزمية الآتية المُمثَّلة بِمُخَطَّط سَيْرِ العمليات، ثمَّ أُجيب عن كلِّ ممَّا يأتي:



أطبّق الخوارزمية باستعمال جدول التَّبَع لإيجاد مُخَرَّجاتها.

n	A	Print	Is $n > 7$?
1			
2	8	8	no
3	12	12	no
4	16	16	no
5	20	20	no
6	24	24	no
7	28	28	no
8	32	32	yes

مُخَرَّجات الخوارزمية هي: 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32

أَصِف مُخَرَّجات الخوارزمية.

تُمثِّل مُخَرَّجات الخوارزمية مضاعفات العدد 4، التي تزيد على أو تساوي 8، وتقلُّ عن 36

أتعلّم

يعمل n في الخوارزمية بوصفه عدّادًا، وهو عدّاد يضمن اكتمال الخوارزمية. ألاحظ أنّ الخوارزمية تكتمل عندما $n = 8$.

أتعلّم

يحتوي صندوق القرار على سؤال إجابته نعم (Yes) أو لا (No).

أتحقق من فهمي

افترض أنَّ العملية في الصندوق الرابع من مُخطَّط سَيْر العمليات الوارد في المثال 3 هي: $Let A = 2n$ ، ثمَّ أجب عن كلِّ ممَّا يأتي:

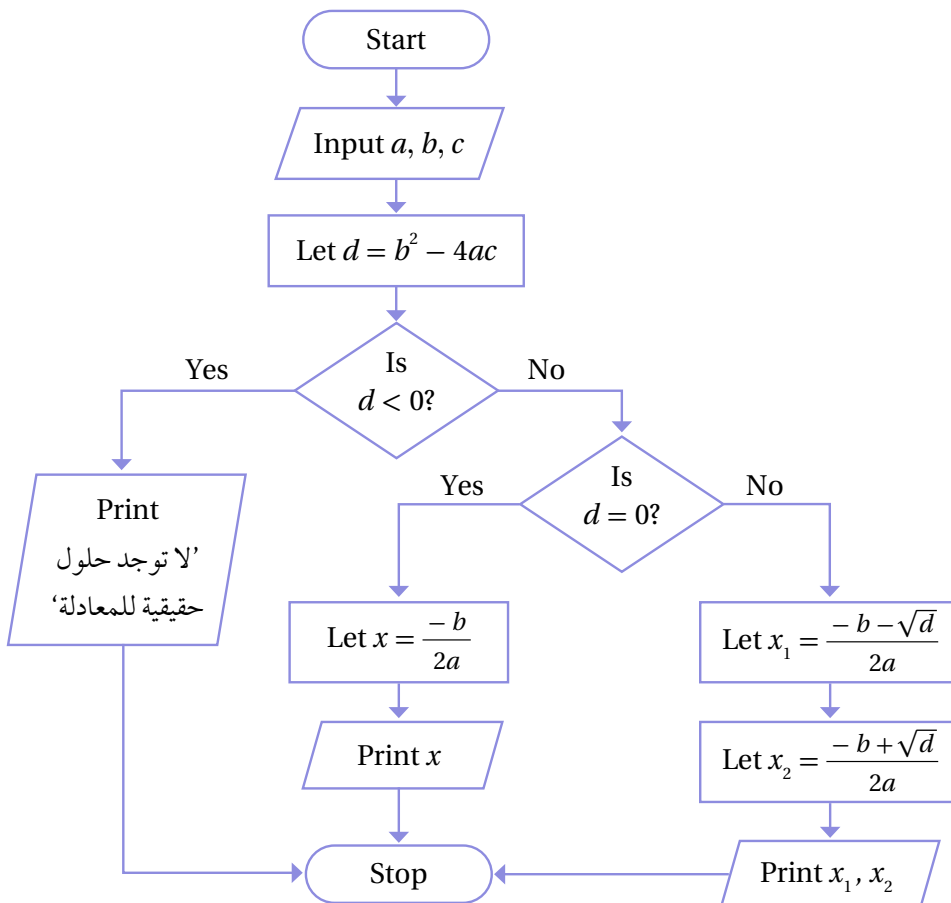
(a) أطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرجاتها.

(b) أصف مُخرجات الخوارزمية.

توجد استعمالات رياضية للخوارزميات أكثر تعقيدًا من تلك التي نوقشت في المثال السابق، مثل: تحديد إذا كان لمعادلة تربيعية حلول حقيقية أم لا، وإيجاد هذه الحلول.

مثال 4

تُستعمل الخوارزمية الآتية لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية: $ax^2 + bx + c = 0$.
أطبِّق الخوارزمية، ثمَّ أحدِّد المُخرج لكلِّ من المعادلات التربيعية التالية:



أتعلَّم

تُستعمل كلمة (Input) للدلالة على أمر إدخال المعطيات.

أذكّر

القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
 وتختلف طبيعة الناتج؛ لأنَّ المُمَيِّز $\Delta = b^2 - 4ac$ قد يكون عددًا موجبًا، أو عددًا سالبًا، أو صفرًا.

1 $x^2 + 7x + 15 = 0$

a	b	c	d	d < 0?
1	7	15	-11	Yes

المُخرَج: لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

2 $2x^2 + 20x + 32 = 0$

a	b	c	d	d < 0?	d = 0?	x_1	x_2
2	20	32	144	No	No	-8	-2

المُخرَج: $x_1 = -8, x_2 = -2$.

3 $4x^2 - 16x + 16 = 0$

a	b	c	d	d < 0?	d = 0?	x
4	-16	16	0	No	Yes	2

المُخرَج: $x = 2$.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي 

أُطَبِّقُ الخوارزمية الواردة في المثال 4، ثُمَّ أَحَدِّدُ المُخرَجَ لكلٍّ من المعادلات التربيعية الآتية:

a) $x^2 + 4x - 12 = 0$

b) $3x^2 + 8x + 15 = 0$

c) $2x^2 + 12x + 18 = 0$

أَتَذَكَّرُ

إذا كانت قيمة المُميزِّ موجبةً، فإنَّه يوجد حلان حقيقيان للمعادلة التربيعية. أمَّا إذا كانت قيمة المُميزِّ صفرًا، فإنَّه يوجد حلٌّ حقيقي واحد للمعادلة التربيعية. وإذا كانت قيمة المُميزِّ سالبةً، فلا توجد للمعادلة التربيعية حلول حقيقية.

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

تُستعمل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد يقبل القسمة على 12 أم لا:

1. أجمع أرقام العدد.
2. إذا كان المجموع في الخطوة الأولى يقبل القسمة على 3، فإنني أنتقل إلى الخطوة الثالثة، وإلا فإن العدد لا يقبل القسمة على 12.
3. إذا كان العدد المُكوَّن من أوَّل رقمين في العدد (آحاد العدد وعشرات) يقبل القسمة على 4، فإن العدد يقبل القسمة على 12، وإلا فإنَّه لا يقبل القسمة على 12.

أُطبّق الخوارزمية السابقة لتحديد إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل القسمة على 12 أم لا:

1 7104

2 3248940

3 5762

4 81456

تُستعمل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد الكلي سعيدًا أم لا:

1. أجد مُربّعات أرقام العدد.
2. أجد مجموع مُربّعات أرقام العدد.
3. أضع مجموع مُربّعات أرقام العدد بدلًا من العدد نفسه.
4. أستمّر في تكرار الخطوة الأولى والخطوة الثانية لكل ناتج حتّى أحصل على مجموع من منزلة واحدة؛ فإذا كان هذا المجموع 1، كان العدد سعيدًا في هذه الحالة، وإذا كان هذا المجموع 4، فيكون العدد وقتئذٍ غير سعيد.

أُطبّق الخوارزمية السابقة لتحديد إذا كان كل عدد ممّا يأتي سعيدًا أم لا:

5 19

6 42

7 49

8 25

أتأمّل الخوارزمية المجاورة، ثمّ أجب عن السؤالين الآتيين:

1. Let $n = 0$, $x = 0$, $y = 1$
2. Let $x = x + 1$, $y = yx$
3. Print y
4. Let $n = n + 1$
5. If $n < 4$, go to step 2
6. If $n = 4$, Stop

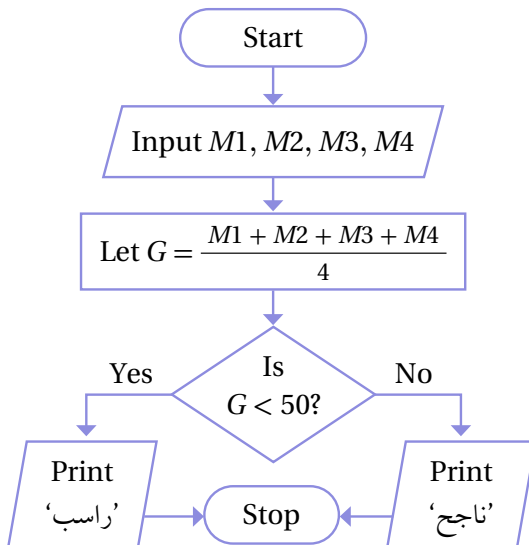
9 أُطبّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبع لإيجاد مُخرجاتها.

10 أصف مُخرجات الخوارزمية.

أتأمّل الخوارزمية المجاورة المُمثّلة بمُخطّط سَيْر العمليات، ثمّ أجب عن السؤالين الآتيين:

11 أصف الاستعمال الرياضي لهذه الخوارزمية.

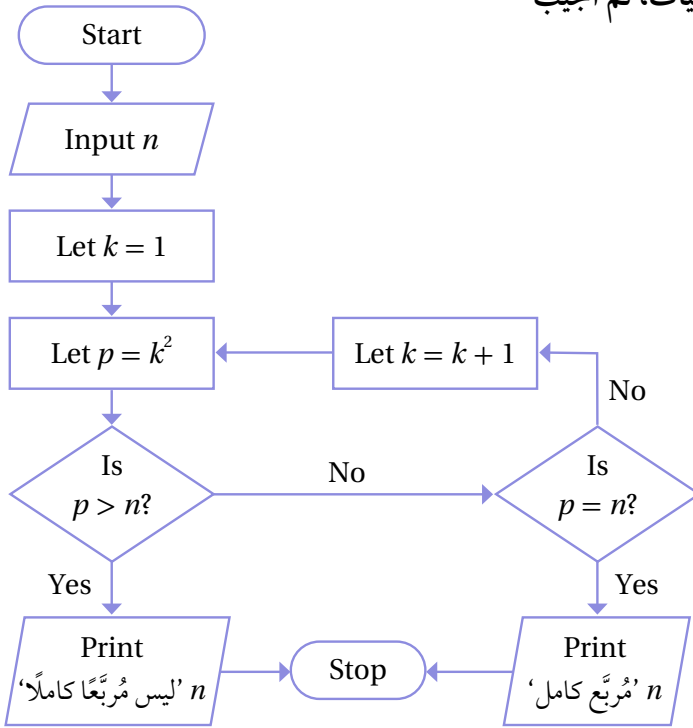
12 أُطبّق الخوارزمية على الأعداد الآتية باستعمال جدول التتبع لإيجاد مُخرَج كلّ منها:



a) $M1 = 48$, $M2 = 52$, $M3 = 46$, $M4 = 49$

b) $M1 = 71$, $M2 = 85$, $M3 = 62$, $M4 = 45$

أتأمل الخوارزمية المجاورة المُمثلة بمُخطط سَير العمليات، ثمَّ أُجيب
عن السؤالين الآتيين:



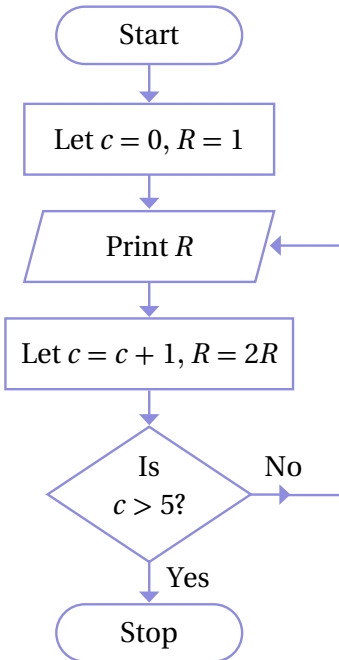
13 أصف الاستعمال الرياضي لهذه الخوارزمية.

14 أطبق الخوارزمية على العددين الآتيين باستعمال جدول التتبع لإيجاد مُخرَج كلٍّ منهما:

a) $n = 24$

b) $n = 16$

أتأمل الخوارزمية المجاورة المُمثلة بمُخطط سَير العمليات، ثمَّ أُجيب عن
السؤالين الآتيين:



15 أطبق الخوارزمية باستعمال جدول التتبع لإيجاد مُخرجاتها.

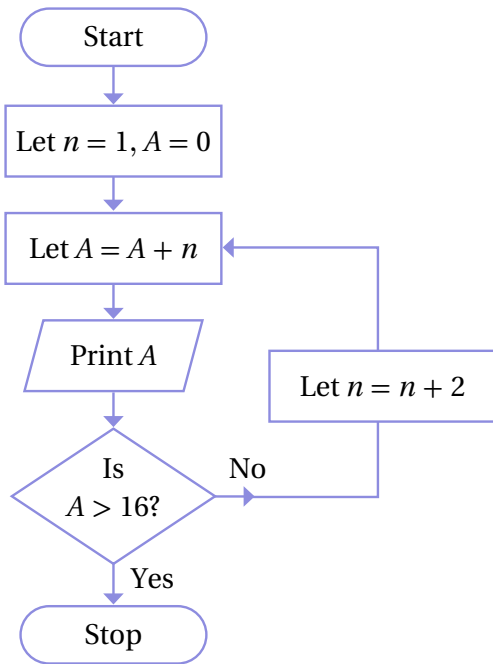
16 أصف مُخرجات الخوارزمية.



تبرير: أتاَمَل الخوارزمية المجاورة المُمَثَّلة بِمُخَطَّط سَيَر العمليات، ثُمَّ أُجِيب عن السُّؤالين الآتيين:

17 أُنَبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التَّبَع لإيجاد مُخَرَّجاتها.

18 أَصِف مُخَرَّجات الخوارزمية، ثُمَّ أَبرِّر إجابتي.

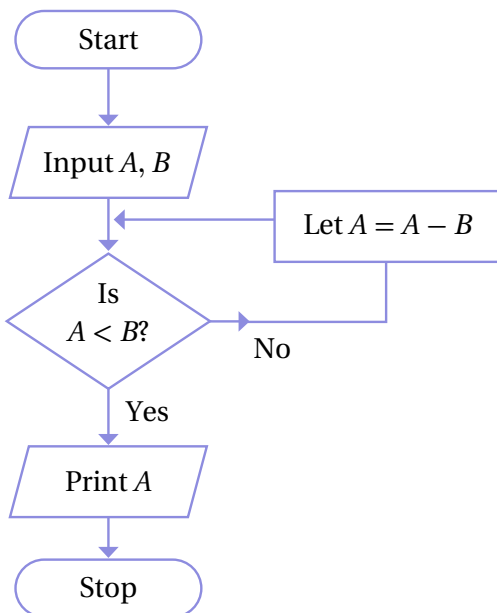


تحدِّ: أتاَمَل الخوارزمية المجاورة المُمَثَّلة بِمُخَطَّط سَيَر العمليات، ثُمَّ أُجِيب عن السُّؤالين الآتيين:

19 أُنَبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التَّبَع عندما

$$A = 27, B = 4$$

20 أَصِف ما يتحقَّق من تطبيق هذه الخوارزمية.



خوارزميات تعبئة الصندوق Bin-Packing Algorithms

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



تعرّف خوارزميات تعبئة الصندوق، واستعمالها لإيجاد الحل الأمثل لمسألة تعبئة.

خوارزميات تعبئة الصناديق، خوارزمية الملاءمة الأولى، خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة، خوارزمية الصندوق الكامل.

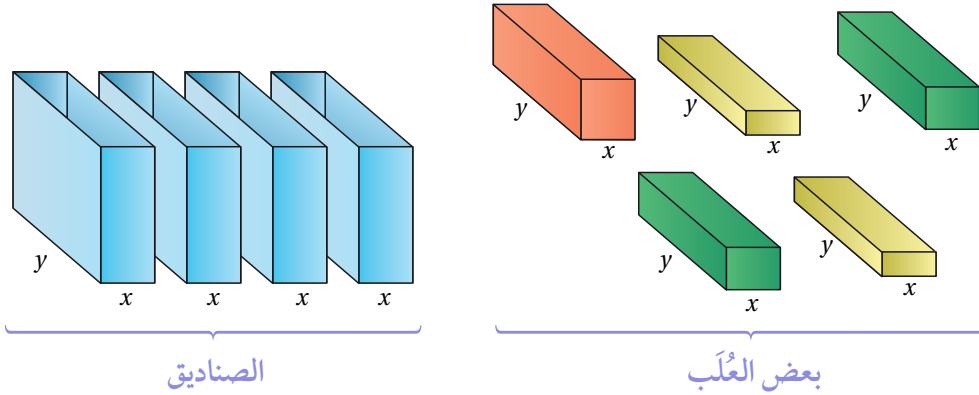


يرغب مُدرّب في صالة رياضية أن يُرتّب على رفوف الأثقال المُبيّنة كتلها (بالكيلوغرام) في ما يلي، علماً بأنّه يُمكن لكل رفٍّ منها أن يحمل 40 kg في الحد الأقصى. كيف يُمكن للمُدرّب أن يُرتّب الأثقال باستعمال أقل عدد من الرفوف؟

18 16 24 16 20 10 12 8 16 12 10 4 12 6 13

خوارزميات تعبئة الصندوق

إذا كان لديّ n من العُلب التي لها المقطع العرضي نفسه (مستطيل عرضه x ، وطوله y)، لكنّ ارتفاعاتها مُتفاوتة كما يظهر في الشكل التالي، وأردت تعبئتها في صناديق، عرض كلّ منها x ، وطول كلّ منها y ، وارتفاعاتها مُتساوية، فكيف يُمكنني فعل ذلك باستعمال أقل عدد مُمكن من الصناديق؟



تُسمّى المسألة السابقة مسألة تعبئة الصندوق، ويُمكن حلّها باستعمال ما يُسمّى **خوارزميات تعبئة الصناديق** (bin-packing algorithms).

يُستعمل هذا النوع من الخوارزميات في حلّ كثير من المسائل الحياتية التي تنطوي على المبدأ نفسه، مثل: تنظيم صناديق البضائع وترتيبها داخل حاويات الشحن، وتحميل البضائع في

شاحنات عليها قيود في الكتلة، وتخزين ملفات بيانات مختلفة الحجم في عدد من الأقراص المدمجة.

تتمثل الخطوة الأولى لحل مسألة تعبئة الصندوق في إيجاد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة كما هو مبين في المثال الآتي.

مثال 1

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كل منها 10 وحدات طول، علمًا بأنَّ للُعب والصناديق المقطع العرضي نفسه. أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب.

5 7 3 5 6 2 4 4 7 4

الخطوة 1: أجد مجموع ارتفاعات العُلب.

$$5 + 7 + 3 + 5 + 6 + 2 + 4 + 4 + 7 + 4 = 47$$

بجمع ارتفاعات العُلب

الخطوة 2: أقسم مجموع ارتفاعات العُلب على ارتفاع الصندوق الواحد.

$$\frac{47}{10} = 4.7$$

بقسمة مجموع ارتفاعات العُلب على ارتفاع الصندوق الواحد

$$\approx 5$$

بتقريب الناتج إلى الأعلى

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 5 صناديق.

أتحقق من فهمي

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كل منها وحدة طول واحدة، علمًا بأنَّ للُعب والصناديق المقطع العرضي نفسه. أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب.

0.5 0.7 0.5 0.2 0.4 0.2 0.5 0.1 0.6

أتعلم

ألاحظ أننا نجد بهذه الطريقة الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب، لكنَّ هذا العدد قد لا يكون كافيًا من الناحية العملية.

أفكر

لماذا يُقَرَّب الناتج إلى الأعلى؟ أبرر إجابتي.

خوارزمية الملاءمة الأولى

توجد خوارزميات عديدة لحل مسألة تعبئة الصندوق، منها **خوارزمية الملاءمة الأولى** (first-fit algorithm). وفي ما يأتي بيان لخطوات هذه الخوارزمية.

خوارزمية الملاءمة الأولى

خوارزمية

يُمكن حلُّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، وذلك باتّباع الخطوات الآتية:

- 1 إيجاد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.
- 2 اتّباع ترتيب العناصر (العُلب) المُعطى في المسألة.
- 3 وضع كل عنصر في أوّل صندوق مُتوافر يتّسع له، بدءًا بالصندوق الأوّل في كل مرّة.
- 4 في حال لم يتّسع أيّ صندوق للعنصر الذي يُراد وضعه، فإنّه يجب إضافة صندوق آخر.

أتعلّم

إذا كان عدد الصناديق المُتوافرة (التي حصلتُ عليها) مُساويًا للحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة، فهذا يعني أنّي توصّلتُ إلى الحل الأمثل.

مثال 2

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلّ منها 1.5 وحدة طول. إذا علمتُ أنّ للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأجيب عن الأسئلة التالية تباعًا:

0.8 0.6 0.5 0.7 0.9 0.4 0.3 0.6 0.5 0.6

1 أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمّ أحدّد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب.

$$0.8 + 0.6 + 0.5 + 0.7 + 0.9 + 0.4 + 0.3 + 0.6 + 0.5 + 0.6 = 5.9$$

بإيجاد مجموع ارتفاعات العُلب

$$\frac{5.9}{1.5} = 3.9\bar{3}$$

بقسمة مجموع ارتفاعات العُلب على ارتفاع الصندوق الواحد

$$\approx 4$$

بتقريب الناتج إلى الأعلى

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 4 صناديق.

الخطوة 2: أضع كل عُلْبَة في أوّل صندوق مُتوافِر يَتَسِعُ لها، بدءًا بالصندوق الأوّل في كل مرّة، وألتزم ترتيب العناصر في المسألة.

B1: 0.8, 0.6

عُلْبَة الصندوق الأوّل

B2: 0.5, 0.7, 0.3

عُلْبَة الصندوق الثاني

B3: 0.9, 0.4

عُلْبَة الصندوق الثالث

B4: 0.6, 0.5

عُلْبَة الصندوق الرابع

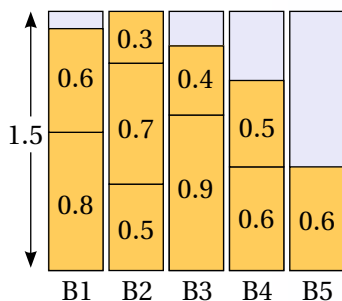
B5: 0.6

عُلْبَة الصندوق الخامس

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلْب باستعمال المُلاءمة الأولى هو 5 صناديق.



الدعم البياني:



يُبيّن الشكل المجاور ترتيب العُلْب في الصناديق الخمسة.

ألاحظ من الشكل أنّ ارتفاع العُلْب في أيّ من الصناديق لم يتجاوز 1.5 وحدة طول.

أشاهد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:



هل توصّلتُ إلى الحلّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرّر إجابتي.

لا؛ لأنّ عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحلّ يزيد على الحدّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.

أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

لأيجاد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها، أحدد أوّلًا الارتفاع المهدور في كل صندوق، ثمّ أجمع قيم الارتفاعات المهدورة جميعها:

$$0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.9 = 1.6$$

مجموع الارتفاعات المهدورة من الصناديق

إذن، هُدر 1.6 وحدة طول في الصناديق جميعها.

أتعلّم

يُمكن إيجاد الارتفاع المهدور بطريقة أخرى، تتمثّل في طرح مجموع ارتفاعات العُلْب من حاصل ضرب عدد الصناديق المُستعملة في التعبئة في ارتفاع الصندوق الواحد كالآتي:

$$5 \times 1.5 - 5.9 = 1.6$$

أتحقق من فهمي

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 20 وحدة طول. إذا علمتُ أنَّ للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية تباعاً:

11 2 15 5 6 17 7

(a) أستمعمل خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

(b) هل توصَّلتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرِّر إجابتي.

(c) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة

تعلمتُ في المثال السابق حلَّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ولكنَّ توجد خوارزمية أخرى يُمكن استعمالها لحلَّ هذه المسألة، هي **خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة** (first-fit decreasing algorithm)، التي تبدأ بترتيب مقاسات العناصر المُعطاة (ارتفاعات العُلب مثلاً) ترتيباً تنازلياً، ثمَّ تطبيق خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العناصر في الصناديق كما هو مُبين أدناه.

أُنذِر

إنَّ تسمية مسائل تعبئة الصندوق بهذا الاسم لا يعني بالضرورة أنَّها جميعاً تتضمَّن ملء صناديق بعُلب أصغر منها، وإنَّما يعني أنَّها تقوم على المبدأ نفسه؛ لذا استُعملت كلمة (العناصر) بدلاً من كلمة (العُلب) في صندوق الخوارزمية المجاور.

خوارزمية

خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة

يُمكن حلَّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة، وذلك باتِّباع الخطوتين الآتيتين:

- 1 ترتيب مقاسات العناصر تنازلياً.
- 2 تطبيق خوارزمية الملاءمة الأولى على العناصر التي أُعيد ترتيب مقاساتها.

مثال 3

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها وحدتان. إذا علمتُ أنَّ للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية تباعاً:

0.6 1.5 1.6 0.2 0.4 0.5 0.7 0.1 0.9 0.3

1 أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أُحدّد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب.

بإيجاد مجموع ارتفاعات العُلب

$$0.6 + 1.5 + 1.6 + 0.2 + 0.4 + 0.5 + 0.7 + 0.1 + 0.9 + 0.3 = 6.8$$

بقسمة مجموع ارتفاعات العُلب على ارتفاع الصندوق الواحد

$$\frac{6.8}{2} = 3.4$$

بتقريب الناتج إلى الأعلى

$$\approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 4 صناديق.

الخطوة 2: أرّب ارتفاعات العُلب ترتيباً تنازلياً.

1.6 1.5 0.9 0.7 0.6 0.5 0.4 0.3 0.2 0.1

الخطوة 3: أطبق خوارزمية الملاءمة الأولى على ارتفاعات العُلب التي أُعيد ترتيب مقاساتها.

B1: 1.6, 0.4

عُلب الصندوق الأول

B2: 1.5, 0.5

عُلب الصندوق الثاني

B3: 0.9, 0.7, 0.3, 0.1

عُلب الصندوق الثالث

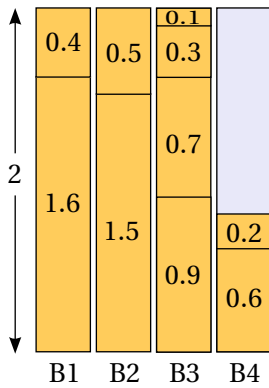
B4: 0.6, 0.2

عُلب الصندوق الرابع

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال الملاءمة الأولى المُتناقصة هو 4 صناديق.

أفكر

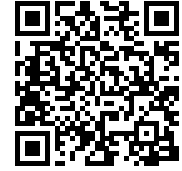
أحلّ المثال 3 باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمَّ أقارن بين الحلين.



الدعم البياني:

يُبين الشكل المجاور ترتيب العُلب في الصناديق الأربعة.

أشاهد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:



2 هل توصّلتُ إلى الحلّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرّر إجابتي.

نعم؛ لأنّ عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحلّ مُساوٍ للحدّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.

3 أجد الارتفاع المهذور في الصناديق جميعها.

ألاحظ عدم وجود ارتفاعات مهذورة إلّا في الصندوق الأخير، وهو ارتفاع يساوي 1.2 وحدة طول.

أتحقّق من فهمي

أستعمل خوارزمية المُلاءمة الأولى المُتناقصة لإعادة حلّ المسألة الواردة في المثال 2، وأحدّد إذا كان الحلّ الناتج هو الحلّ الأمثل أم لا، وأجد مجموع الارتفاعات المهذورة في الصناديق جميعها، ثمّ أقرّن الحلّ الذي توصّلتُ إليه بالحلّ الناتج باستعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى.

أتعلّم

بوجه عام، يكون الحلّ الناتج من استعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى المُتناقصة أفضل منه عند استعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى، لكنّ ذلك لا يعني بالضرورة التوصّل إلى الحلّ الأمثل دائماً.

خوارزمية الصندوق الكامل

ألاحظ أنّ الخوارزميتين اللتين تعلّمتهما في المثالين السابقين لحلّ مسائل تعبئة الصندوق تشترطان التزام الترتيب المُعطى أو الترتيب التنازلي لمقاسات العناصر. ولكنّ ثمة خوارزمية ثالثة يُمكن استعمالها لحلّ مسائل تعبئة الصندوق من دون الالتزام بأيّ ترتيب لمقاسات العناصر، وهي **خوارزمية الصندوق الكامل** (full-bin packing algorithm).

تبدأ هذه الخوارزمية باختيار العناصر التي يُمكن دمجها معًا لملء الصندوق كاملاً بصرف النظر عن ترتيب مقاساتها، ثم تعبئة العناصر المُتبقية باستعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى.

خوارزمية الصندوق الكامل

خوارزمية

يُمكن حلُّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، وذلك باتّباع الخطوات الآتية:

- 1 إيجاد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.
- 2 البحث عن العناصر التي يُمكن أن تملأ صندوقاً كاملاً، ثمّ تعبئتها أولاً.
- 3 تطبيق خوارزمية المُلاءمة الأولى على العناصر المُتبقية.

أتعلّم

بوجه عام، يكون الحلُّ الناتج من استعمال خوارزمية الصندوق الكامل أفضل منه عند استعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى أو المُلاءمة الأولى المُتناقصة، لكن ذلك لا يعني بالضرورة التوصل إلى الحل الأمثل دائماً.

مثال 4

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 17 وحدة طول. إذا علمتُ أنّ للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأجيب عن السؤالين التاليين تبعاً:

4.1 5.3 4.8 3.2 4.7 4.6 5.6 4.3 4.4 5.2 4 3

1 أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب.

بإيجاد مجموع ارتفاعات العُلب

$$3 + 4 + 5.2 + 4.4 + 4.3 + 5.6 + 4.6 + 4.7 + 3.2 + 4.8 + 5.3 + 4.1 = 53.2$$

بقسمة مجموع ارتفاعات العُلب على ارتفاع الصندوق الواحد

$$\frac{53.2}{17} = 3.129$$

بتقريب الناتج إلى الأعلى

$$\approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 4 صناديق.

الخطوة 2: أطبّق خوارزمية الصندوق الكامل.

B1: 3, 4, 4.7, 5.3 عُلب الصندوق الأوّل

B2: 4.4, 4.6, 3.2, 4.8 عُلب الصندوق الثاني

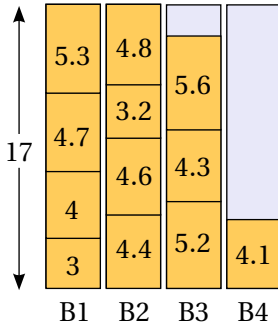
B3: 5.2, 4.3, 5.6

B4: 4.1

عُلب الصندوق الثالث

عُلب الصندوق الرابع

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 صناديق.



الدعم البياني:

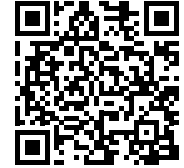
يُبين الشكل المجاور ترتيب العُلب في الصناديق الأربعة.

أتعلّم

ألاحظ أنّ الذي مُلئ أولاً هو الصندوق الأول والصندوق الثاني، ثمّ استُعملت خوارزمية الملاءمة الأولى لمِلء الصندوق الثالث والصندوق الرابع.

أشاهد المقطع المرئي

(الفيديو) في الرمز الآتي:



هل توصّلتُ إلى الحلّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرّر إجابتي.

نعم؛ لأنّ عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحلّ مُساوٍ للحدّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة.

أتحقّق من فهمي

أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لإعادة حلّ المسألة الواردة في المثال 3، وأحدّد إذا كان الحلّ الناتج هو الحلّ الأمثل أم لا، ثمّ أقارن الحلّ الذي توصّلتُ إليه بالحلّ الناتج باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة.

خوارزميات تعبئة الصندوق

مُلخّص المفهوم

اسم الخوارزمية	إيجابياتها	سلبياتها
خوارزمية الملاءمة الأولى.	• سهولة التطبيق.	• عدم تقديم حلّ جيّد في أغلب الأحيان.
خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة.	• سهولة التطبيق. • تقديم حلّ جيّد نوعاً ما بوجه عام.	• قد لا تُقدّم الحلّ الأمثل.
خوارزمية الصندوق الكامل.	• تقديم حلّ جيّد بوجه عام.	• قد لا تُقدّم الحلّ الأمثل. • من الصعب تطبيقها إذا كان عدد العناصر كبيراً جدّاً، وكانت مقاساتها قيمًا عشرية.

يُمكن توظيف خوارزميات التعبئة في العديد من التطبيقات الحياتية التي تهدف إلى تقليص أكبر قدر من الهدر في المساحات والأطوال.

مثال 5: من الحياة



قماش: في ما يأتي أطوال 10 قطع قماش بالمتر، يرغب تاجر في قصّها من لفّات قماش كبيرة، طول كلّ منها 60 m:

32 45 17 23 38 28 16 9 12 10

أجد الحد الأدنى من عدد لفّات القماش الكبيرة اللازمة لقصّ قطع القماش.

1

بإيجاد مجموع أطوال قطع القماش
 $32 + 45 + 17 + 23 + 38 + 28 + 16 + 9 + 12 + 10 = 230$

$$\frac{230}{60} = 3.8\bar{3}$$

بقسمة مجموع أطوال قطع القماش
على طول اللفّة الكبيرة الواحدة

$$\approx 4$$

بتقريب الناتج إلى الأعلى

إذن، الحد الأدنى من عدد لفّات القماش الكبيرة اللازمة لقصّ قطع القماش هو 4 لفّات.

أحدّد كيف تُقصّ قطع القماش باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمّ أحدّد عدد اللّفات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمّ أجد طول الجزء المهدور من القماش.

2

B1: 32, 17, 9

قطع القماش التي ستُقصّ من اللفّة الأولى

B2: 45, 12

قطع القماش التي ستُقصّ من اللفّة الثانية

B3: 23, 28

قطع القماش التي ستُقصّ من اللفّة الثالثة

B4: 38, 16

قطع القماش التي ستُقصّ من اللفّة الرابعة

B5: 10

قطع القماش التي ستُقصّ من اللفّة الخامسة

إذن، عدد اللّفات اللازمة لقصّ قطع القماش ذات الأطوال المُعطاة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 5 لفّات قماش كبيرة.

أَتَعَلَّم

الجزء المهدور من كل لفّة هو طول اللفّة الكلي (60 m) مطروحاً منه مجموع قطع القماش التي يُراد قَصُّها من تلك اللفّة. فمثلاً، الجزء المهدور من اللفّة الأولى هو:

$$60 - (32 + 17 + 9) = 2$$

أَتَعَلَّم

أُلاحظ أنّ كمية القماش التي أُهدرت باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى تزيد على كمية القماش التي أُهدرت باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل بمقدار 60 m؛ لذا يُعدُّ قَصُّ قطع القماش في هذه المسألة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل أفضل.

لإيجاد طول الجزء المهدور من القماش، أُحدّد أولاً طول الجزء المهدور من كل لفّة كبيرة، ثمّ أجمع أطوال الأجزاء المهدورة:

$$2 + 3 + 9 + 6 + 50 = 70 \quad \text{مجموع أطوال الأجزاء المهدورة من لفّات القماش الكبيرة}$$

إذن، طول الجزء المهدور من القماش هو 70 m

3 أُحدّد كيف تُقَصُّ قطع القماش باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمّ أُحدّد عدد اللفّات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمّ أجد طول الجزء المهدور من القماش.

B1: 32, 28 قطع القماش التي ستُقصّ من اللفّة الأولى

B2: 38, 12, 10 قطع القماش التي ستُقصّ من اللفّة الثانية

B3: 45, 9 قطع القماش التي ستُقصّ من اللفّة الثالثة

B4: 17, 23, 16 قطع القماش التي ستُقصّ من اللفّة الرابعة

إذن، عدد اللفّات اللازمة لقَصِّ قطع القماش ذات الأطوال المُعطاة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 لفّات قماش كبيرة.

لإيجاد طول الجزء المهدور من القماش، أُحدّد أولاً طول الجزء المهدور من كل لفّة كبيرة، ثمّ أجمع أطوال الأجزاء المهدورة:

$$6 + 4 = 10 \quad \text{مجموع أطوال الأجزاء المهدورة من لفّات القماش الكبيرة}$$

إذن، طول الجزء المهدور من القماش هو 10 m

4 أيّ الخوارزميتين توصّلتُ بها إلى الحلّ الأمثل؟ أبرّر إجابتي.

توصّلتُ إلى الحلّ الأمثل باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل؛ لأنّ عدد لفّات القماش الذي حصرته من تطبيقها مُساوٍ للحدّ الأدنى من عدد اللفّات اللازمة.

أتحقق من فهمي



تخزين البيانات: في ما يأتي ساعات 9 ملفات حاسوبية (بالجيجابايت)
يُراد حفظها في أقراص تخزين، ساعة كل منها 100 جيجابايت:

29 52 73 87 74 47 38 61 41

(a) أجد الحد الأدنى من عدد أقراص التخزين اللازمة لحفظ الملفات.

(b) أجد كيف تُحفظ الملفات في الأقراص باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثم أجد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثم أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

(c) أجد كيف تُحفظ الملفات في الأقراص باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثم أجد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثم أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

(d) أي الخوارزميتين توصلتُ بها إلى الحل الأمثل؟ أبرر إجابتي.

أدرب وأحل المسائل



يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كل منها 5 وحدات طول. إذا علمتُ أن للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأجب عن الأسئلة التالية تبعاً:

1.8 1.4 2.6 1.6 2.8 0.9 3.1 0.8 1.2 2.4 0.6

1 أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثم أجد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

2 هل الحل الناتج في السؤال السابق هو الحل الأمثل لهذه المسألة؟ أبرر إجابتي.

3 أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كل منها 60 وحدة طول. إذا علمتُ أنَّ للعلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأجب عن الأسئلة التالية تباعاً:

31 10 38 45 19 47 35 28 12

4 أستمعمل خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

5 هل الحلُّ الناتج في السؤال السابق هو الحلُّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرر إجابتي.

6 أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كل منها 65 وحدة طول. إذا علمتُ أنَّ للعلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأجب عن الأسئلة التالية تباعاً:

42 21 15 16 35 10 31 11 27 39

7 أستمعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك.

8 هل الحلُّ الناتج في السؤال السابق هو الحلُّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرر إجابتي.

9 أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

شحن: في ما يأتي كتل 7 أجهزة (بالكيلوغرام) يُراد شحنها في صناديق؛ على ألا تتجاوز كتلة الصندوق الواحد 60 kg:

41 28 42 31 36 32 29

10 أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لشحن الأجهزة.

11 أحدد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

12 أحدد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

13 أُحَدِّد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحَدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

14 أيُّ الخوارزميات توصَّلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبَرِّر إجابتي.

أسلاك نحاسية: في ما يأتي أطوال (بالسنتيمتر) لـ 10 قطع يُراد قَصُّها من أسلاك نحاسية، طول كلٍّ منها 1 m:



58 45 18 55 47 12 63 30 19 42

15 أُحَدِّد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى، ثمَّ أُحَدِّد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

16 أُحَدِّد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى المُتناقصة، ثمَّ أُحَدِّد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

17 أُحَدِّد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحَدِّد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

18 أيُّ الخوارزميات توصَّلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبَرِّر إجابتي.

أثقال: أعود إلى المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة الآتية تبعاً:

19 أُحَدِّد كيف تُرتَّب الأثقال على الرفوف باستعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى، ثمَّ أُحَدِّد عدد الرفوف اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

20 أُحَدِّد كيف تُرتَّب الأثقال على الرفوف باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحَدِّد عدد الرفوف اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.



تبرير: في ما يأتي أطوال 8 قطع خشبية (بالستيمتر) تلزم لصنع خزانة صغيرة، ويُراد قَصُّها من ألواح خشبية:

20 35 50 60 20 70 75 20

21 تتوافر ألواح خشبية، طول كلٍّ منها 1 m، وسعرها 3 JD. أستمعل خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة لتحديد كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من الألواح، ثمَّ أجد التكلفة الكلية لصنع الخزانة باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أحسب الكمية المهدورة من الخشب.

22 تتوافر ألواح خشبية، طول كلٍّ منها 1.5 m، وسعرها 4 JD. أستمعل خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة لتحديد كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من هذه الألواح، ثمَّ أجد التكلفة الكلية لصنع الخزانة باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أحسب الكمية المهدورة من الخشب.

23 أيُّ الخوارزميتين يُمكن استعمالها لصنع الخزانة بتكلفة أقل؟ أبرر إجابتي.

24 ما أقل تكلفة لصنع الخزانة إذا أمكن استعمال الألواح التي طولها 1 m والألواح التي طولها 1.5 m معًا؟ أبرر إجابتي.



تحدّ: في ما يأتي كتل 9 حقائب سفر (بالكيلوغرام) يُراد نقلها في حاويات، ويُمكن لكلٍّ منها أن تحمل كتلة إجمالية أقصاها 50 kg:

24 14 8 x 19 25 6 17 9

إذا علمتُ أن كتلة إحدى الحقائب لم تُقَسَّ قياسًا دقيقًا، ولتكن x كيلوغرامًا، حيث: $19 < x \leq 23$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية تبعًا:

25 أحدد كيف تُوزَع الحقائب على الحاويات باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى.

26 أحدد الطريقتين المُمكنتين لتوزيع الحقائب على الحاويات باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة.

27 أحدد القيمة (القيم) المُمكنة للمتغير x في كلٍّ من الطريقتين المُشار إليهما في السؤال السابق بعد توزيع الحقائب باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة.

المُخطَّطات

Graphs

فكرة الدرس



- تعرّف المُخطَّط، ومُكوّناته، وبعض التعريفات الأساسية المُتعلّقة به.
- إيجاد درجة كل رأس من رؤوس مُخطَّط مُعطى، وتعرّف العلاقة بين درجات الرؤوس وعدد الحافات، واستعمالها لحلّ المسائل.

المصطلحات

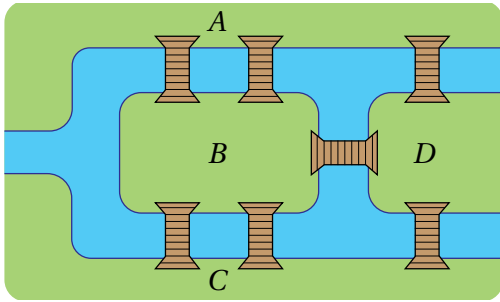


مُخطَّط، رأس، حافة، مُخطَّط موزون، نظرية المُخطَّطات، المسار، مجموعة الرؤوس، مجموعة الحافات، مجموعة الدرجات، درجة الرأس، ممشي، ممر، طريق، دائرة، دائرة هاملتون، دائرة أويلر، حلقة، حافات مُتعدّدة.

مسألة اليوم

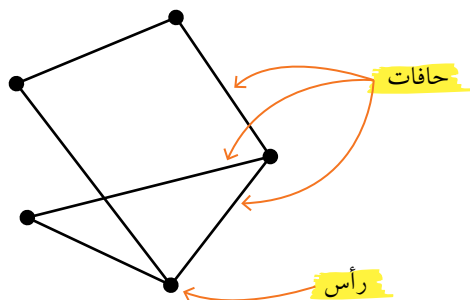


يُبيّن الشكل المجاور 4 مناطق في مدينة، يفصل بينها نهر مُتفرّع، وقد أنشئت 7 جسور بين تلك المناطق. هل يُمكن زيارة المناطق الأربع جميعها، بدءاً بإحداها؛ شرط عبور الجسور السبعة جميعها وعدم عبور أيّ جسر منها مرّتين، ثمّ العودة إلى نقطة البداية؟



المُخطَّطات

تنطوي العديد من المواقف الحياتية على روابط بين أشخاص أو أماكن أو أشياء مختلفة. فمثلاً، ترتبط المدن بعضها ببعض عبر الطرق، وتتصل أجهزة الحاسوب بعضها ببعض عبر شبكات الإنترنت، ويُمكن التعبير عن كلّ من هذه الروابط بتمثيل بياني يُسمّى **المُخطَّط**



(graph)؛ وهو وسيلة تُظهر كيف ترتبط الأشياء المختلفة بصرياً، بحيث يُعبّر عن هذه الأشياء بعقد تُسمّى **الرؤوس** (vertices)، ويُعبّر عن الروابط بين الرؤوس (إن وُجدت) بخطوط (أو منحنيات) متصلة تُسمّى **الحافات** (edges) كما يظهر في الشكل المجاور.

أتعلّم

تقاطع حافتين في المُخطَّط لا يُمثّل رأساً.

نظرية المخططات (graph theory) هي تسمية لفرع من فروع الرياضيات يُعنى بدراسة المخططات.

مثال 1: من الحياة

الباص السريع: أتأمل الشكل الآتي الذي يُبين شبكة الباص السريع داخل مدينة عمّان، ثم أجيب عن الأسئلة التالية تبعاً:



يُعدُّ مشروع الباص السريع أول نظام نقل عام حديث لمدينة عمّان، وهو يمتاز بالسرعة والمرونة والكفاءة والأمان والدقة في المواعيد؛ ما يوفر كثيراً من الوقت والجهد. وقد أُفرد لهذا المشروع مسار خاص تسير عليها حافلات كبيرة تُقدِّم خدمات متميّزة للركاب.

1 هل يُعدُّ الشكل السابق مخططاً؟ أبرّر إجابتي.

نعم؛ لأنّه يحتوي على رؤوس، وعلى حافات بين بعض هذه الرؤوس.

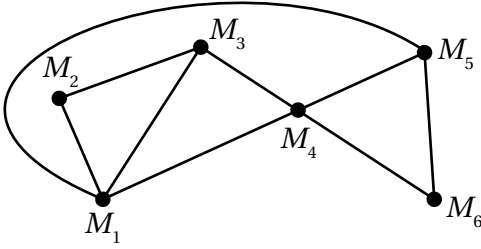
2 أصف ما تمثّله كلّ من الرؤوس والحافات في المخطط؟

تمثّل الرؤوس المحطات التي يتوقّف عندها الباص السريع، وتمثّل الحافات مسارات الباص السريع بين المحطات.

3 أحدّد المحطات التي سيمرُّ بها الباص في رحلة من مجمع المحطة إلى حدائق الملك عبد الله.

المحطات التي سيمرُّ بها الباص أثناء الرحلة هي: مستشفى الأمير حمزة، وتقاطع طارق، ومجمع الشمال، ودوار المدينة الرياضية.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي



طيران: أنأمل الشكل المجاور الذي يُبين المسارات الجوية التي تتبعها طائرات إحدى شركات الطيران، ثمَّ أجيب عن الأسئلة الآتية تبعاً:

(a) هل يُعدُّ الشكل المجاور مُخطَّطاً؟

(b) أصِف ما تُمثِّله كلُّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط.

(c) أ حدِّد المَحَطَّات التي ستمرُّ بها إحدى الطائرات التابعة للشركة في رحلة من الرأس M_1 إلى الرأس M_6 (أذكر حلين مختلفين).

المُخطَّطات الموزونة

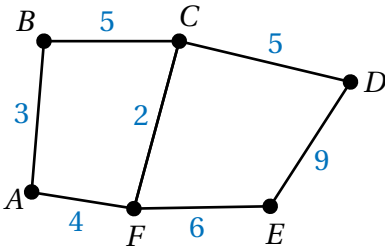
لغة الرياضيات

يُطلق على القيمة المُقترنة بالحافة اسم وزن الحافة.

يُطلق على المُخطَّط الذي يحوي قيمة مُقترنة بكل حافة من حافته اسم **المُخطَّط الموزون** (weighted graph)، وتُمثِّل هذه القيم مقاييس عديدة، مثل: المسافة، والتكلفة، والزمن.

يُمكن استعمال المُخطَّطات الموزونة لحلَّ العديد من المسائل الحياتية والعلمية، مثل تحديد المسار الذي يُمكن به الوصول من موقع إلى آخر في إحدى المدن عبر أقصر مسار مُمكن، أو بأقل تكلفة مُمكنة. وبلغه المُخطَّطات، فإنَّ **المسار** (route) من الرأس A إلى الرأس B هو مجموعة من الحافات، تبدأ بالرأس A ، وتنتهي بالرأس B ، وقد يتكرَّر في المسار أيُّ من الرؤوس والحافات.

مثال 2: من الحياة



طرق: يُبين الشكل المجاور مُخطَّطاً للطرق الرئيسة في إحدى المدن، ويُمثِّل العدد على كل حافة المسافة (بالكيلومترات) بين كل منطقتين في المدينة:

لغة الرياضيات

المسار المباشر بين رأسين في مخطط هو الحافة بين هذين الرأسين (إن وُجدت).

أتعلم

طول المسار هو مجموع أوزان حافته.

أتعلم

من غير المنطقي النظر في المسارات التي تحوي حافات مكررة في المثال 2

أتعلم

بوجه عام، لا تُرسم المخططات الموزونة وفق تناسب دقيق بين القيم المُقترنة بالحافات؛ فقد تبدو حافتان مُساويتين في الطول، في حين أنَّهما تقتربان بقيمتين مختلفتين.

1 أجد طول المسار المباشر بين المنطقة F والمنطقة C .

طول المسار المباشر بين هاتين المنطقتين هو: 2 km

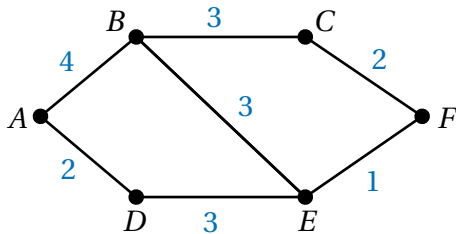
2 أجد أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة D .

لتحديد أقصر مسار بين هاتين المنطقتين، أجد أولاً جميع المسارات التي تصل بينهما، وأجد طول كلٍّ منها، ثم أجد أقصر مسار بين هذه المسارات:

المسار	طول المسار (بالكيلومترات)
$ABCD$	$3 + 5 + 5 = 13$ km
$AFED$	$4 + 6 + 9 = 19$ km
$AFCD$	$4 + 2 + 5 = 11$ km
$ABCFED$	$3 + 5 + 2 + 6 + 9 = 25$ km

إذن، أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة D هو $AFCD$ ، وطوله 11 km

أتحقق من فهمي



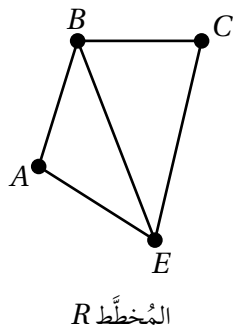
طرق: يُبين الشكل المجاور مخططاً للطرق الرئيسة بين مجموعة من المدن، ويمثل العدد على كل حافة الزمن (بالساعات) الذي تستغرقه سيارة في قطع المسافة بين كل مدينتين:

(a) أجد الزمن الذي تستغرقه السيارة في قطع المسار المباشر بين المدينة B والمدينة E .

(b) أجد أقل زمن تستغرقه السيارة في الوصول من المدينة A إلى المدينة F ، والمسار الذي تتبعه في هذه الرحلة.

رؤوس المخطط وحافاته

في ما يأتي بعض التعريفات الأساسية الخاصة بنظرية المخططات:



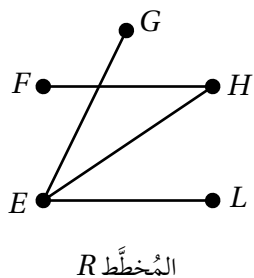
- **مجموعة الرؤوس** (vertices set): مجموعة تحوي جميع رؤوس المخطط. فمثلاً، مجموعة رؤوس المخطط R المجاور هي: (A, B, C, E) .

- **مجموعة الحافات** (edges set): مجموعة تحوي جميع حافات المخطط. فمثلاً، مجموعة حافات المخطط R المجاور هي: (AB, AE, BC, BE, CE) ، حيث يُعبّر الرمز AB مثلاً عن الحافة بين الرأس A والرأس B .

- **درجة الرأس** (degree of the vertex): عدد يُعبّر عن عدد الحافات التي تلتقي عند الرأس. فمثلاً، درجة الرأس A في المخطط R أعلاه هي 2، ودرجة الرأس B في المخطط نفسه هي 3.

- **مجموعة الدرجات** (degree set): مجموعة تحوي جميع درجات رؤوس المخطط. فمثلاً، مجموعة الدرجات للمخطط R أعلاه هي:

$$\deg R = (2, 2, 3, 3)$$



أَتأمل المخطط R المجاور، ثم أجيب عن كلِّ ممَّا يأتي:

1. أحدد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.
 - مجموعة الرؤوس هي: (E, F, G, H, L) .
 - مجموعة الحافات هي: (EL, EH, EG, FH) .

أتعلّم

إذا كانت درجة الرأس عدداً زوجياً، فإنها تُسمّى درجة زوجية، أمّا إذا كانت عدداً فردياً، فإنها تُسمّى درجة فردية. فمثلاً، للرأس B في المخطط R المجاور درجة فردية، وللرأس C فيه درجة زوجية.

رموز رياضية

يُرمز إلى مجموعة درجات المخطط R أعلاه بالرمز $\deg R$ ، علماً بأن $\deg$ اختصار للكلمة الإنجليزية (degree) التي تعني الدرجة.

مثال 3

أفكر

هل تُعدُّ نقطة تقاطع الحافة FH مع الحافة EG رأساً؟ أبرّر إجابتي.

2 أُحَدِّد درجة كل رأس، ونوعها.

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
E	3	فردية
F	1	فردية
G	1	فردية
H	2	زوجية
L	1	فردية

أتعلّم

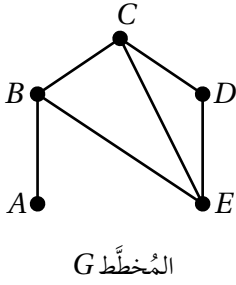
الحافة بين الرأس L والرأس E تُكْتَب EL أو LE .

3 أُحَدِّد مجموعة الدرجات للمُخَطَّط.

$$\deg R = (1, 1, 1, 2, 3)$$

أتحقّق من فهمي

أُتأمل المُخَطَّط G المجاور، ثمّ أُجيب عن كلّ ممّا يأتي:



(a) أُحَدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

(b) أُحَدِّد درجة كل رأس، ونوعها.

(c) أُحَدِّد مجموعة الدرجات للمُخَطَّط.

مجموع درجات رؤوس المُخَطَّط

يُمْكِن أيضًا إيجاد مجموع درجات رؤوس أيّ مُخَطَّط إذا عُلِم عدد حافته، وذلك بضرب عدد حافته في 2؛ لأنّ كل حافة ترتبط برأسين.

مجموع درجات رؤوس المُخَطَّط

مفهوم أساسي

إذا كان لمُخَطَّط n من الرؤوس، و E من الحافات، فإنّه يُمكن إيجاد مجموع درجات رؤوس هذا المُخَطَّط باستعمال العلاقة الآتية:

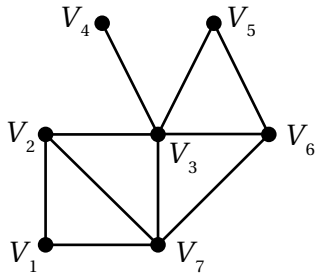
$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

حيث $\deg V_k$ درجة الرأس V_k .

أفكّر

نتيجةً للمفهوم الأساسي المجاور؛ فإنّ عدد الرؤوس ذات الدرجة الفردية يجب أن يكون زوجياً أو 0، لماذا؟

مثال 4



أجد مجموع درجات رؤوس المخطط المجاور.

للمخطط المجاور 10 حافات؛ لذا يُمكن إيجاد مجموع درجات رؤوسه كالآتي:

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

علاقة مجموع درجات رؤوس المخطط

$$\sum_{k=1}^7 (\deg V_k) = 2(10)$$

بتعويض $n = 7, E = 10$

$$= 20$$

بالتبسيط

إذن، مجموع درجات رؤوس المخطط هو: 20

مخطط له 6 رؤوس و 9 حافات، ودرجات رؤوسه هي: $x, 2x, 2x-1, x+1, x+1, x^2-1$. أجد قيمة المتغير x .

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

علاقة مجموع درجات رؤوس المخطط

$$x + 2x + 2x - 1 + x + 1 + x + 1 + x^2 - 1 = 2(9)$$

بتعويض

$$x^2 + 7x = 18$$

بالتبسيط

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

ب طرح 18 من طرفي المعادلة

$$(x + 9)(x - 2) = 0$$

بالتحليل

$$x + 9 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$$

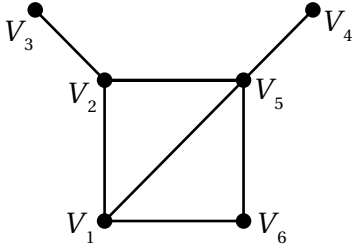
باستعمال خاصية الضرب الصفري

$$x = -9$$

$$x = 2$$

بحل كل معادلة

بما أن x يُمثّل درجة أحد الرؤوس، فإنه من غير المُمكن أن يكون x سالبًا. إذن: $x = 2$.

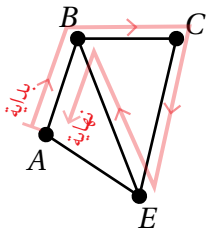


أتحقق من فهمي

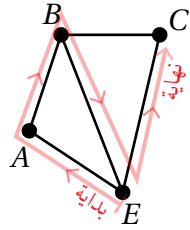
(a) أجد مجموع درجات رؤوس المخطط المجاور.

(b) مخطط له 5 رؤوس و 6 حافات، ودرجات رؤوسه هي: $x, x^2 + 2, 3x - 1, 3x, 2x + 1$. أجد قيمة المتغير x .

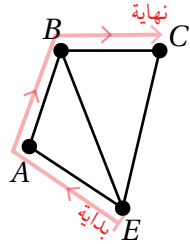
الممشى والممر والطريق والدائرة والحلقة في المخطط



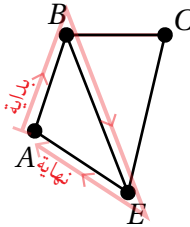
• **الممشى (walk):** سلسلة من الحافات في المخطط، تُمثّل فيها نهاية كل حافة بداية حافة أخرى، ما عدا الحافة الأخيرة. فمثلاً، $ABCEBA$ ممشى في المخطط المجاور.



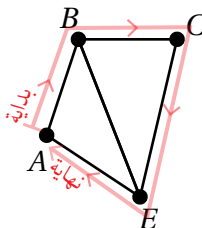
• **الممر (trail):** ممشى لا يتكرّر فيه أي حافة، ويُمكن أن تتكرّر فيه الرؤوس. فمثلاً، $EABEC$ ممر في المخطط المجاور.



• **الطريق (path):** ممر لا يتكرّر فيه أي رأس. فمثلاً، $EABC$ طريق في المخطط المجاور.



• **الدائرة (circuit):** ممر رأس بدايته هو نفسه رأس نهايته، ولا يتكرّر فيه أي رأس، ما عدا رأس البداية ورأس النهاية. فمثلاً، $ABEA$ دائرة في المخطط المجاور.



• **دائرة هاملتون (Hamiltonian circuit):** دائرة تحوي جميع رؤوس المخطط. فمثلاً، $ABCEA$ دائرة هاملتون في المخطط المجاور.

لغة الرياضيات

يُطلق أيضًا على الممشى اسم المسار.

أتعلّم

يُمكن تكرار الحافات والرؤوس في الممشى. فمثلاً، في الممشى $ABCEBA$ تكررّت الحافة AB (أو BA).

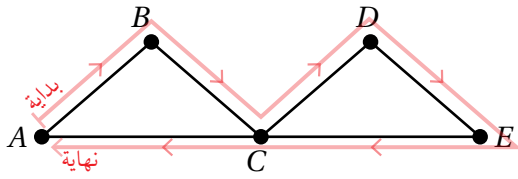
أتعلّم

لا يشترط في أي من الممشى، أو الطريق، أو الممر، أو الدائرة أن يحوي جميع رؤوس المخطط.

أتعلّم

لا تتكرّر أي حافة في الدائرة، ولا في الطريق.

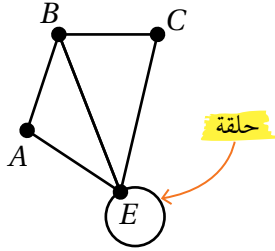
- **دائرة أويلر (Eulerian circuit):** ممر رأس بدايته هو نفسه رأس نهايته، وهو يشمل



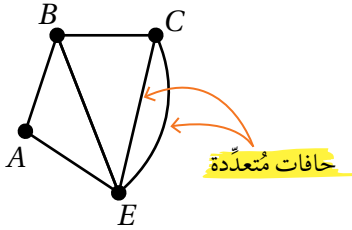
جميع حافات المخطط من دون تكرار. فمثلاً، دائرة $ABCDECA$ أويلر في المخطط المجاور.

أتعلم

درجة الرأس E في هذه الحالة هي 5؛ لأنّ الحلقة تُعدّ حافة في كلا الاتجاهين.



- **الحلقة (loop):** حافة تبدأ بالرأس نفسه، وتنتهي به. فمثلاً، حلقة EE في المخطط المجاور.

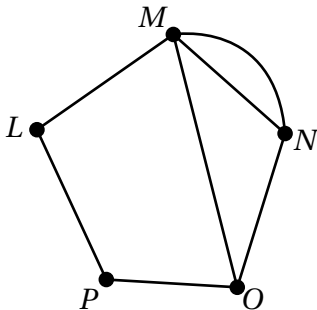


- **الحافات المتعددة (multiple edges):** حافتان أو مجموعة من الحافات التي تربط زوجاً من الرؤوس. فمثلاً، الحافات المتعددة في المخطط المجاور تربط بين الرأس E والرأس C .

أتعلم

عند تحديد مجموعة الحافات في المخطط المجاور، يجب ذكر EC مرتين؛ نظراً إلى وجود حافتين تربطان بين الرأس E والرأس C .

مثال 5



أتأمل المخطط المجاور، ثمّ أحدد فيه ممشًى لا يُمثّل ممرّاً، وممرّاً لا يُمثّل طريقاً، وطريقاً، ودائرة، ودائرة هاملتون (إن وُجدت)، ودائرة أويلر (إن وُجدت).

- ممشًى لا يُمثّل ممرّاً: $POMNOP$.
- ممر لا يُمثّل طريقاً: $MLPOMN$.
- طريق: $MLPO$.
- دائرة: $LMOPL$.
- دائرة هاملتون: $LMNOPL$.
- دائرة أويلر: لا يُمكن إيجاد دائرة أويلر في هذا المخطط.

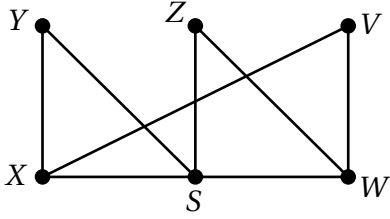
أتعلم

الممشى $POMNOP$ في المثال المجاور ليس ممرّاً؛ لأنّ الحافة OP تكرّرت فيه.

أتعلم

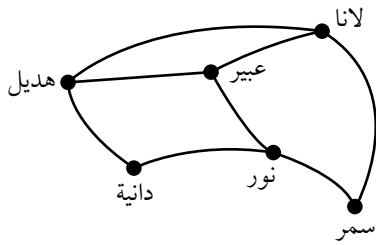
إذا كانت درجة كل رأس من رؤوس المخطط زوجية، وكان يوجد ممر بين أيّ رأسين في المخطط، فإنّ المخطط يحتوي على دائرة أويلر.

أتحقق من فهمي



أتأمل المخطط المجاور، ثم أحدّد فيه ممشًى لا يُمثّل ممراً، وممراً لا يُمثّل طريقاً، وطريقاً، ودائرة، ودائرة هاملتون (إن وُجدت)، ودائرة أويلر (إن وُجدت).

أَتدرب وأحلّ المسائل



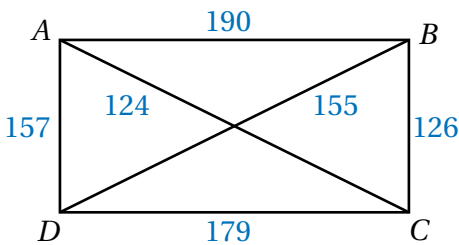
أتأمل الشكل المجاور الذي يُبين علاقات الصداقة التي تربط بين مجموعة من الفتيات في أحد مواقع التواصل الاجتماعي، ثم أُجيب عن كلّ ممّا يأتي:

1 هل يُعدّ الشكل المجاور مخططاً؟

2 أصف ما تُمثّله كلّ من الرؤوس والحافات في المخطط.

3 كم صديقةً لانا في هذا الموقع؟

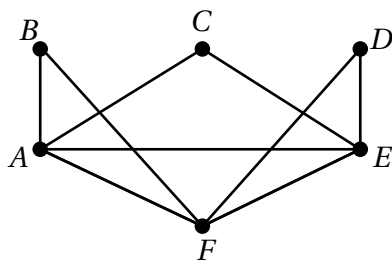
4 من الصديقات المُشترَكَات بين عبير ودانية؟



مندوب مبيعات: يُبين الشكل المجاور مخططاً لتكلفة تنقّل مندوب مبيعات بين مجموعة من المحافظات الأردنية للترويج لمنتج جديد، حيث يُمثّل العدد على كل حافة التكلفة بالدينار للتنقّل بين كل محافظتين:

5 أجد تكلفة ذهاب مندوب المبيعات في مسار مباشر من المحافظة A إلى المحافظة B، ثم إلى المحافظة C.

6 أحدّد أقل تكلفة للذهاب من المحافظة B إلى المحافظة D، ثم أحدّد المسار الذي اتخذته لذلك.

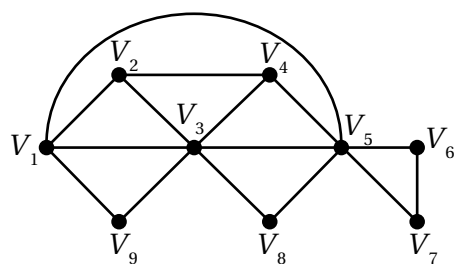


أتأمل المخطط المجاور، ثم أجيب عن كل مما يأتي:

7 أحدد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

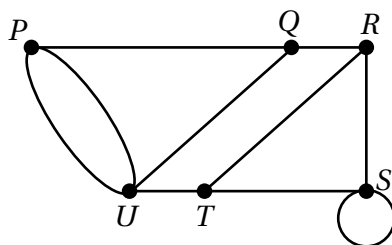
8 أحدد درجة كل رأس، ونوعها.

9 أحدد مجموعة الدرجات للمخطط.



10 أجد مجموع درجات رؤوس المخطط المجاور.

11 مخطط له 5 رؤوس و6 حافات، ودرجات رؤوسه هي: $x, 2x, x^2 + 3, x + 1, 2x + 1$. أجد قيمة المتغير x .



أتأمل المخطط المجاور، ثم أجيب عن كل مما يأتي:

12 أحدد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

13 أجد مجموع درجات رؤوس المخطط.

إرشاد: عند استعمال صبغة مجموع درجات الرؤوس، نعد الحلقة حافة واحدة.

14 أحدد في المخطط ممشًى لا يمثل ممراً، وممراً لا يمثل طريقاً،

وطريقاً، ودائرة، ودائرة هاملتون (إن وجدت)، ودائرة أويلر (إن وجدت).

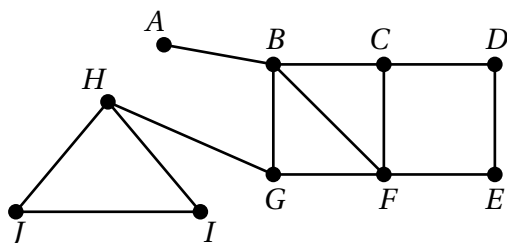
أتأمل المخطط المجاور، ثم أحدد فيه:

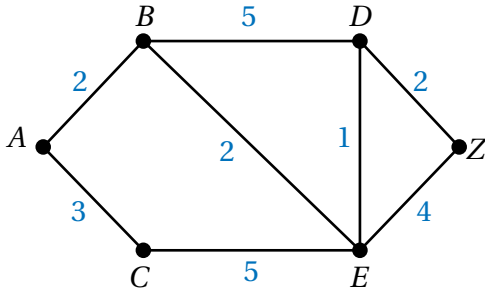
15 ممشًى لا يمثل ممراً.

16 ممراً لا يمثل طريقاً.

17 خمسة طرق من B إلى D.

18 دائرة.



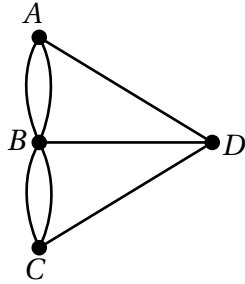


طرق: يُبيّن الشكل المجاور مُخطّطًا للطرق الرئيسة التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن، ويُمثّل العدد على كل حافة المسافة (بالكيلومتر) بين كل منطقتين:

19 أُحدّد طول أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة Z، ثمّ أُحدّد المسار الذي اتخذه لذلك.

20 أجد دائرة تبدأ بالرأس B، وتنتهي به، ثمّ أجد طولها بالكيلومتر.

21 أجد دائرة هاملتون، ثمّ أجد طولها بالكيلومتر.



22 **جسور:** يُبيّن الشكل المجاور مُخطّطًا للمسألة الواردة في بند (مسألة اليوم). أَسْتَعين بالمُخطّط وما تعلّمته في هذا الدرس عن دائرة أويلر للإجابة عن المسألة، ثمّ أبرّر إجابتي.

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أرسم مُخطّطًا يُحقّق الوصف المُعطى في كلّ ممّا يأتي:

23 يتضمّن المُخطّط 4 رؤوس، و6 حافات.

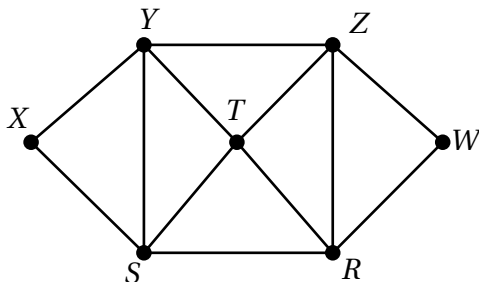
24 يتضمّن المُخطّط 5 رؤوس، و8 حافات، وحلقة واحدة.

25 يتضمّن المُخطّط 4 رؤوس درجاتها فردية، ورأسًا درجته زوجية.

26 يتضمّن المُخطّط 3 رؤوس درجة كلّ منها 2، ورأسين درجة كلّ منهما 1

27 يتضمّن المُخطّط رأسين درجة كلّ منهما 2، ورأسًا درجته 3، ورأسًا درجته 1

28 يتضمّن المُخطّط 4 رؤوس درجة كلّ منها 5، و3 رؤوس درجة كلّ منها 2



تحذّر: أتملّ المُخطّط المجاور، ثمّ أُجيب عن السؤالين الآتيين:

29 أُحدّد دائرة هاملتون في المُخطّط.

30 أُحدّد دائرة أويلر في المُخطّط.

أنواع خاصة من المخططات Special Types of Graphs

- تعرّف أنواع خاصة من المخططات.
- تعرّف مصفوفة الجوار، واستعمالها للتعبير عن الروابط في المخططات.
- تعرّف مصفوفة الوزن، واستعمالها لتمثيل العلاقات بين الرؤوس في مخطط موزون.

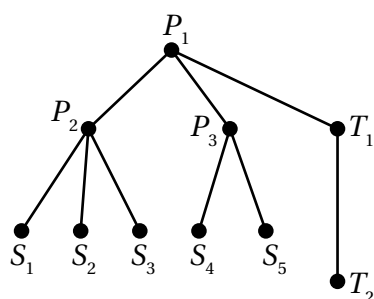
فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



يُبين المخطط المجاور طريقة توصيل عدد من مصابيح

الإنارة (S) والقواطع (P) والمقابس (T) في غرفة:

(1) ماذا يُشبه المخطط الناتج؟

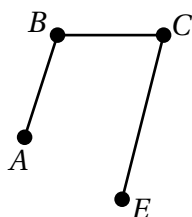
(2) هل يُمكن تمثيل المخطط بأكثر من طريقة؟

تعرّفت في الدرس السابق مفهوم المخطط ومكوّناته وبعض التعريفات الأساسية المتعلقة به، وسأتعرّف في هذا الدرس بعض الأنواع الخاصة من المخططات.

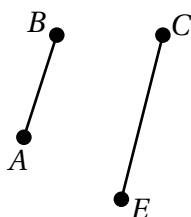
المخطط البسيط، والمخطط المتصل، والمخطط الجزئي

يُطلق على المخطط الذي لا توجد فيه حلقة أو حافات مُتعدّدة اسم **المخطط البسيط** (simple graph).

أما **المخطط المتصل** (connected graph) فهو مخطط يمتاز بوجود طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه. أنظر الشكل الآتي الذي يُبين مخططاً متصلاً ومخططاً آخر غير متصل.



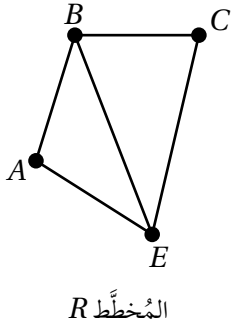
مخطط متصل



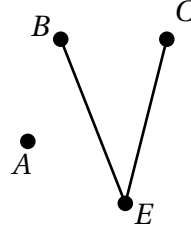
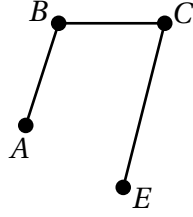
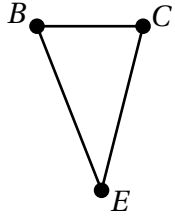
مخطط غير متصل

أتذكّر

الطريق هو ممر لا يتكرّر فيه أيّ رأس.



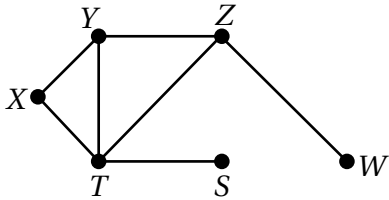
وأما **المُخطَّط الجزئي** (subgraph) من مُخطَّط ما فهو مُخطَّط تنتمي جميع رؤوسه وحافته إلى هذا المُخطَّط. في ما يأتي مُخطَّطات جزئية من المُخطَّط R المبين في الشكل المجاور.



أتعلّم

لا يُشترط في المُخطَّط الجزئي أن يكون متصلاً.

مثال 1



أتأمّل المُخطَّط المجاور، ثمّ أجيب عن كلّ ممّا يأتي:

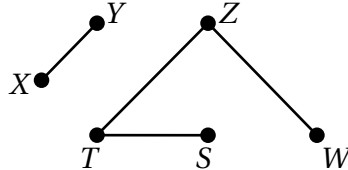
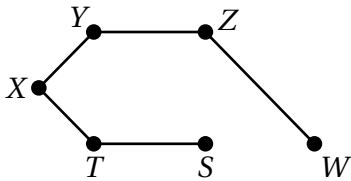
1 هل المُخطَّط بسيط؟ أبرّر إجابتي.

نعم؛ لأنّه لا يحوي حلقات أو حافات مُتعدّدة.

2 هل المُخطَّط متصل؟ أبرّر إجابتي.

نعم؛ لأنّه يُمكن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه.

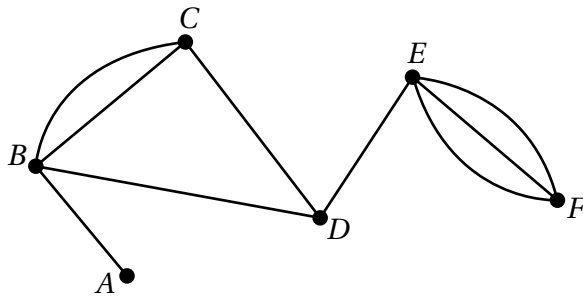
3 أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.



أتذكّر

الحلقة هي حافة تبدأ عند الرأس نفسه، وتنتهي به. أما الحافات المُتعدّدة فهي تُعبّر عن وجود أكثر من حافة بين رأسين.

أتحقق من فهمي

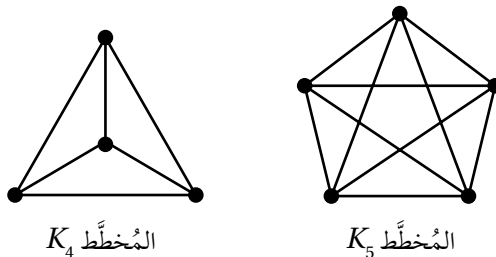


أنامل المخطط المجاور، ثم
أجيب عن كل مما يأتي:

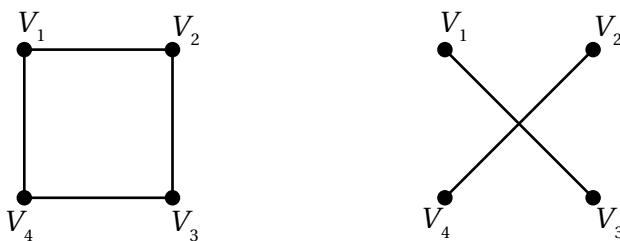
- (a) هل المخطط بسيط؟ أبرر إجابتي.
- (b) هل المخطط متصل؟ أبرر إجابتي.
- (c) أرسم مخططين جزئيين من المخطط.

المخطط الكامل، والمخطط المكمل

المخطط الكامل (complete graph) هو مخطط بسيط يتصل كل رأسين فيه بحافة واحدة، ويرمز إلى المخطط الكامل الذي يحوي n من الرؤوس بالرمز K_n . أنظر الشكل الآتي الذي يبين المخطط K_4 والمخطط K_5 .



وأما المخطط البسيط الذي عدد رؤوسه مساوٍ لعدد رؤوس المخطط البسيط G ، وليكن n ، والذي تكون مجموعة حافته هي جميع الحافات الموجودة في المخطط K_n وغير الموجودة في المخطط G ، فيسمى **المخطط المكمل** (the complement graph) للمخطط G ، ويرمز إليه بالرمز $\bar{G}$. أنظر الشكل الآتي الذي يبين المخطط G والمخطط المكمل له $\bar{G}$.



المخطط G

$\bar{G}$ المخطط المكمل للمخطط G

أتذكر

المخطط البسيط هو
مخطط لا توجد فيه حلقة
أو حافات متعددة.

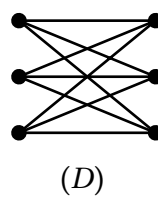
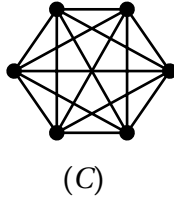
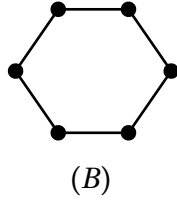
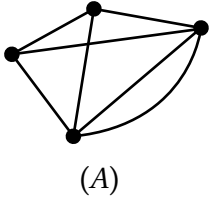
أتعلم

إذا أضفنا حافات المخطط
المكمل للمخطط نفسه،
فإنه ينتج مخطط كامل.

مثال 2

1

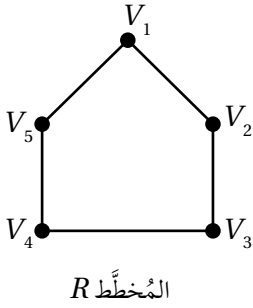
أحدّد المخطط الكامل ممّا يأتي، وأسمّيه بالرموز، ثمّ أبرّر إجابتي.



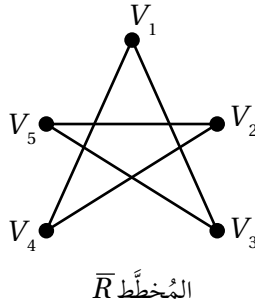
المخطط الكامل من بين هذه المخططات هو المخطط C ؛ لأنّ كل رأسين من رؤوسه متصلان بحافة واحدة فقط. ويُرْمَز إلى هذا المخطط بالرمز K_6 . أمّا المخطط A فهو غير كامل؛ لأنّه مخطط غير بسيط؛ إذ يتصل رأسان من رؤوسه بحافتين. وأمّا المخططان B و D فهما ليسا كاملين؛ لأنّ فيهما رؤوساً غير متصلة بحافات.

2

أرسم $\bar{R}$ للمخطط R المجاور.



يبيّن الشكل الآتي المخطط $\bar{R}$ المكمل للمخطط R المجاور.

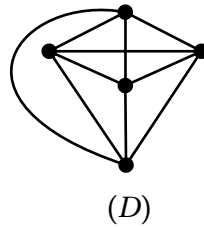
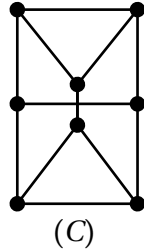
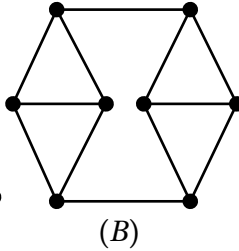
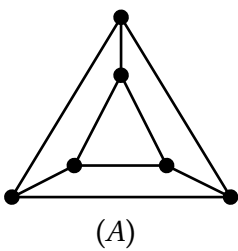


أتعلّم

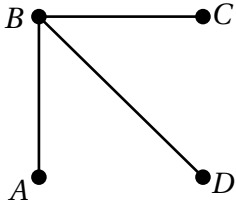
لرسم $\bar{R}$ للمخطط R المجاور، أبدأ برسم K_5 ، ثمّ أ حذف منه جميع الحافات الموجودة في R .

أتحقّق من فهمي

(a) أحدّد المخطط الكامل ممّا يأتي، وأسمّيه بالرموز، ثمّ أبرّر إجابتي.

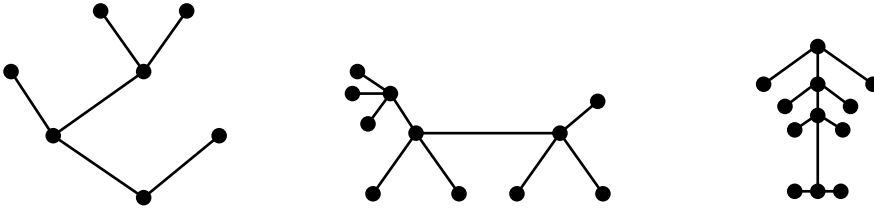


(b) أرسم $\bar{R}$ للمخطط R المجاور.

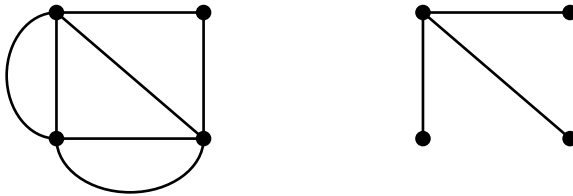


الشجرة، والشجرة الشاملة

يُطلق على المخطط المتصل الذي لا يحتوي أيّ دائرة اسم **الشجرة** (tree).
في ما يأتي ثلاثة مخططات يُعدُّ كلُّ منها شجرة:



تُسمى الشجرة T **شجرة شاملة** (spanning tree) للمخطط المتصل G إذا كانت T مخططاً جزئياً من G ، وتحتوي جميع رؤوسه كما هو مبين في الشكل الآتي.



المخطط G .

الشجرة T شاملة للمخطط G .

أتذكّر

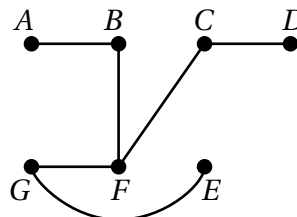
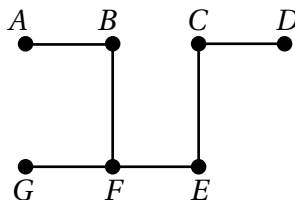
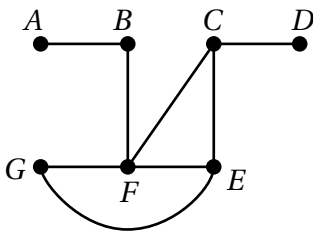
الدائرة هي ممرّ رأس بدايته هو نفسه رأس نهايته، ولا يتكرّر فيه رأس آخر أكثر من مرّة واحدة.

لغة الرياضيات

توجد أسماء أخرى عديدة للشجرة الشاملة، أكثرها شهرة: شجرة الانتشار، وشجرة الامتداد، والشجرة المغطّية.

مثال 3

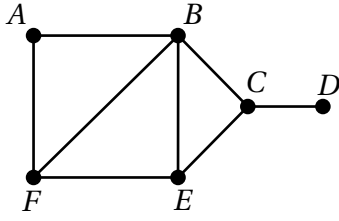
أرسم شجرتين شاملتين للمخطط المجاور.
يُمكن رسم شجرتين شاملتين للمخطط المجاور كما يأتي:



أتعلّم

يُمكن رسم أشجار شاملة عديدة للمخطط. كذلك يُمكن للشجرة الشاملة أن تكون شجرة شاملة لأكثر من مخطط.

أتحقق من فهمي



أرسم شجرتين شاملتين للمُخطَّط المجاور.

أتعلّم

الشجرة الشاملة هي شجرة؛ لذا ينبغي أن تكون متصلة، وألا تحوي أيّ دائرة.

أصغر شجرة شاملة

تعلمتُ في المثال السابق إيجاد أشجار شاملة لمُخطَّط متصل. ولكن، كيف يُمكن إيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط المتصل الموزون؟

يُمكن إيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط المتصل الموزون باستعمال خوارزمية برايم (Prim's algorithm)، التي يُمكن بها تحديد أقصر طريقة وأسرعها لربط جميع الرؤوس في المُخطَّط المتصل الموزون، بحيث يكون مجموع أوزان الحافات في هذه الشجرة الشاملة أقل ما يُمكن.

أفكر

هل يُمكن للشجرة أن تحتوي على حافات مُتعدّدة أو حلقات؟ أبرّر إجابتي.

خوارزمية برايم

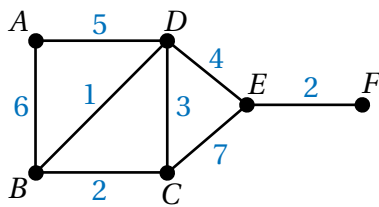
خوارزمية

يُمكن إيجاد أصغر شجرة شاملة لمُخطَّط متصل موزون باستعمال خوارزمية برايم، وذلك باتباع الخطوات الآتية:

- 1 اختيار أيّ رأس في المُخطَّط لبدء رسم (إنشاء) الشجرة.
- 2 تحديد أقل حافة وزناً تربط بين رأس موجود في الشجرة ورأس لم يُصَفْ بعد إلى الشجرة. وفي حال وجود حافات عديدة لها الوزن نفسه، فإنّه يُمكن اختيار أيّ منها. وإذا شكّلت الحافة دائرة، فإنّها لا تضاف إلى الشجرة.
- 3 تكرار الخطوة الثانية حتّى تكتمل إضافة جميع الرؤوس، ويتمّ ربطها بالشجرة.
- 4 كتابة الحافات المضافة إلى الشجرة بالترتيب.

أتعلّم

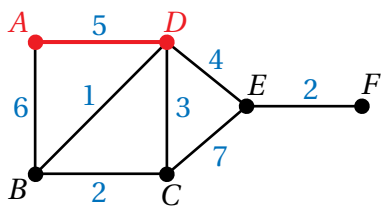
مفهوم (أصغر شجرة شاملة) مُرتبط فقط بالمُخطَّطات الموزونة.



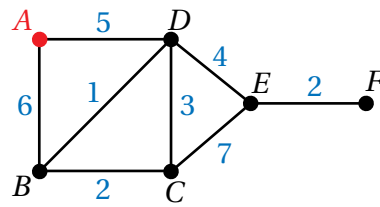
أكبال كهربائية: يُبين الشكل المجاور مُخطَّطاً لأكبال كهربائية تربط بين محطات التوزيع في إحدى المناطق. وفيه يُمثَّل العدد على كل حافة طول الكَبَل (بالكيلومترات) بين كل مُحطَّتين في المنطقة:

أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.

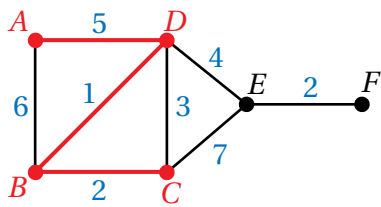
2. أُحدِّد أقل حافة وزناً مُرتبطة بالرأس A ، وهي AD ، ثمَّ أُضيفها إلى الشجرة.



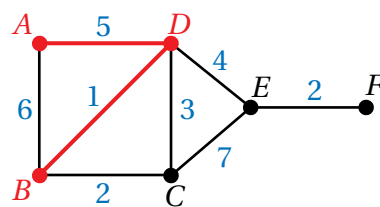
1. أختار أيَّ رأس في المُخطَّط لبدء رسم (إنشاء) الشجرة الشاملة، وليكن الرأس A .



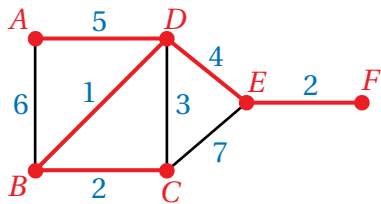
4. أُضيف الحافة BC إلى الشجرة؛ لأنَّها أقل حافة وزناً بين الحافات المُرتبطة بالرؤوس A, D, B التي أُضيفت إلى الشجرة أصلاً.



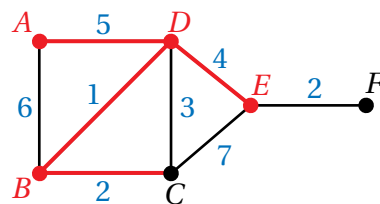
3. أُضيف الحافة DB إلى الشجرة؛ لأنَّها أقل حافة وزناً بين الحافات المُرتبطة بالرأس A والرأس D اللذين أُضيفا إلى الشجرة أصلاً.



6. أُضيف الحافة EF إلى الشجرة.



5. أُضيف الحافة DE إلى الشجرة؛ لأنَّها أقل حافة وزناً بين الحافات المُرتبطة بالرؤوس A, D, B, C التي أُضيفت إلى الشجرة أصلاً.



بما أنَّه تمَّ ربط جميع رؤوس المُخطَّط معاً، فإنَّ ذلك يعني رسم (إنشاء) أصغر شجرة شاملة.

: الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة الشاملة بالترتيب هي: AD, DB, BC, DE, EF .

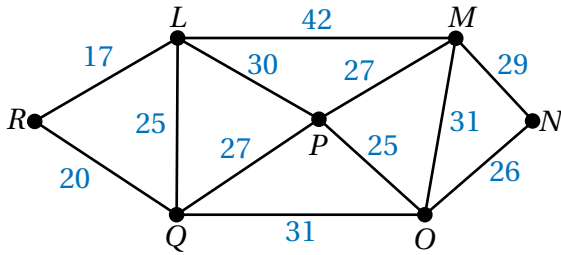
أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل طول من الأكبال يلزم لربط جميع المحطات في المنطقة.

لإيجاد أقل طول للأكبال، أجد الوزن الكلي للشجرة الشاملة الناتجة في السؤال السابق، وذلك بجمع أوزان الحافات في الشجرة كما يأتي:

$$5 + 1 + 2 + 4 + 2 = 14$$

إذن، أقل طول من الأكبال يلزم لربط جميع المحطات في المنطقة هو: 14 km

أتحقق من فهمي



أنابيب مياه: يُبين الشكل المجاور مُخطَّطًا لشبكة أنابيب مياه تصل بين المحطات الرئيسة في إحدى المدن. وفيه يُمثّل العدد على كل حافة طول الأنبوب (بالكيلومتر) بين كل محطتين في المدينة:

(a) أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثم أكتب الحافات التي أُضيفت إليها بالترتيب.

(b) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل طول من الأنابيب يلزم لربط جميع المحطات في المدينة.

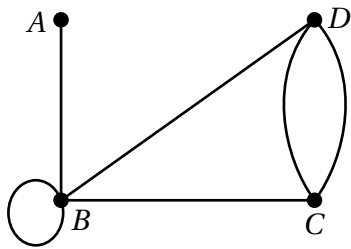
تمثيل المُخطَّطات باستعمال المصفوفات

تعرّفُ في الدرس السابق أنَّ المُخطَّط تمثيل بياني يُستعمل للتعبير عن روابط بين أشياء باستعمال رؤوس وحافات. ولكن يُمكن أيضًا التعبير عن هذه الروابط باستعمال المصفوفات. فمثلاً، يُمكن التعبير عن المُخطَّطات غير الموزونة باستعمال **مصفوفة الجوار** (adjacency matrix)؛ وهي مصفوفة مُربّعة رتبته $n \times n$ ، ومُدخلاتها عدد الحافات التي تربط بين كل رأسين في المُخطَّط، إضافةً إلى عدد الحافات التي تربط الرؤوس بنفسها (الحلقات). أمّا المُخطَّطات الموزونة فيُمكن التعبير عنها باستعمال **مصفوفة الوزن** (weight matrix)؛ وهي مصفوفة مُربّعة رتبته $n \times n$ ، ومُدخلاتها أوزان الحافات التي تربط بين كل رأسين في المُخطَّط، إضافةً إلى أوزان الحافات التي تربط الرؤوس بنفسها (الحلقات).

أتعلّم

تُمثّل n في رتبة المصفوفة عدد رؤوس المُخطَّط، ويُمثّل كل صف وكل عمود في المصفوفة رأسًا من رؤوس المُخطَّط.

مثال 5



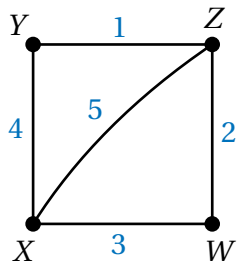
أُمثِّل المخطط المجاور بمصفوفة الجوار.

- بما أن المخطط يحوي 4 رؤوس، فإن رتبة المصفوفة هي 4×4
- أكتب أسماء الرؤوس فوق الأعمدة وبجانب الصفوف لتسهيل الحل، ثم أملأ مدخلات المصفوفة بعدد الحافات بين كل رأسين من الصفوف والأعمدة.

	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	1	2	1	1
C	0	1	0	2
D	0	1	2	0

أتعلم

ألاحظ أن المدخلة 0 تدل على عدم اتصال الرأسين في مصفوفة الجوار، وألاحظ أيضاً أنه تم حساب كل حافة مرتين (مرة لكل من الرأسين اللذين تصل بينهما)، وكذا الحال بالنسبة إلى الحلقة؛ فهي تُحسب مرتين؛ لأنه يمكن عدها حافة في كلا الاتجاهين.



أُمثِّل المخطط الموزون المجاور بمصفوفة الوزن.

- بما أن المخطط يحوي 4 رؤوس، فإن رتبة المصفوفة هي 4×4
- أكتب أسماء الرؤوس فوق الأعمدة وبجانب الصفوف لتسهيل الحل، ثم أملأ مدخلات المصفوفة بأوزان الحافات بين كل رأسين من الصفوف والأعمدة.

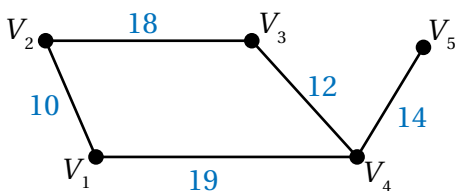
	X	Y	Z	W
X	-	4	5	3
Y	4	-	1	-
Z	5	1	-	2
W	3	-	2	-

أتعلم

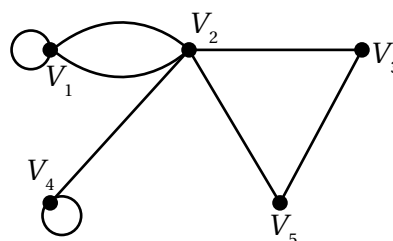
يُستعمل الرمز - في مصفوفة الوزن للدلالة على عدم اتصال الرأسين في المخطط.

أتحقق من فهمي

(b) أُمثِّل المخطط الآتي بمصفوفة الوزن.

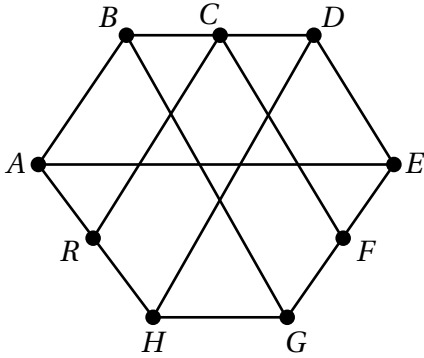


(a) أُمثِّل المخطط الآتي بمصفوفة الجوار.



أفكر

- 1 ما دلالة مجموع مدخلات كل صف في مصفوفة الجوار؟
- 2 ما دلالة مجموع كل عمود في مصفوفة الجوار؟



أَتَأَمَّلُ الْمُخَطَّطَ الْمَجَاوِرَ، ثُمَّ أُجِيبُ عَنْ كُلِّ مِمَّا يَأْتِي:

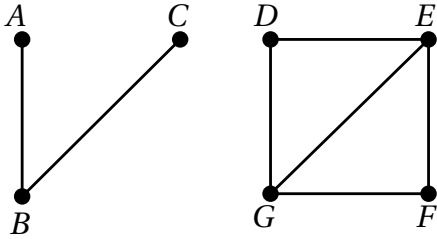
1 هل المُخَطَّطُ بسيط؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

2 هل المُخَطَّطُ متصل؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

3 هل المُخَطَّطُ كامل؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

4 أرسم مُخَطَّطَيْنِ جُزْئِيَيْنِ مِنَ الْمُخَطَّطِ.

5 أرسم شجرة شاملة لِلْمُخَطَّطِ.



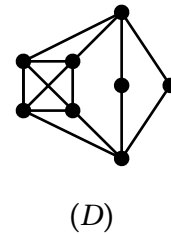
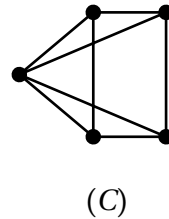
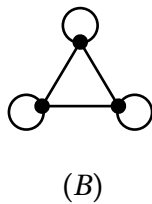
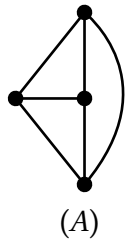
أَتَأَمَّلُ الْمُخَطَّطَ الْمَجَاوِرَ، ثُمَّ أُجِيبُ عَنْ كُلِّ مِمَّا يَأْتِي:

6 هل المُخَطَّطُ بسيط؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

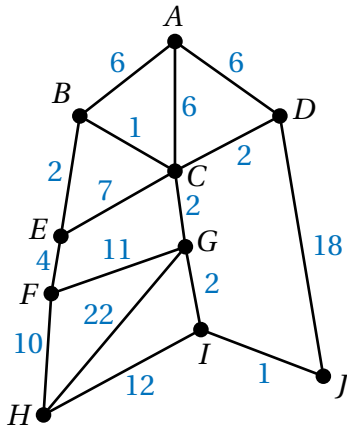
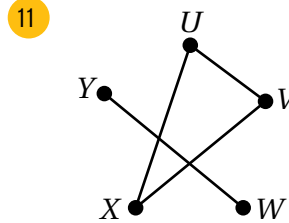
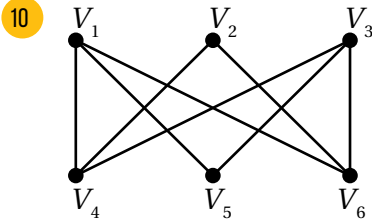
7 هل المُخَطَّطُ متصل؟ أُبَرِّرُ إجابتي.

8 أرسم مُخَطَّطَيْنِ جُزْئِيَيْنِ مِنَ الْمُخَطَّطِ.

9 أُحَدِّدُ الْمُخَطَّطَ الْكَامِلَ مِمَّا يَأْتِي، وَأُسَمِّيهِ بِالرَّمُوزِ، ثُمَّ أُبَرِّرُ إجابتي.



أرسم المخطط المُكَمَّل لكلِّ من المخططات الآتية:

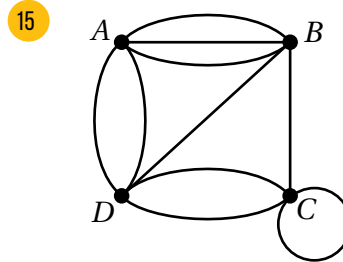
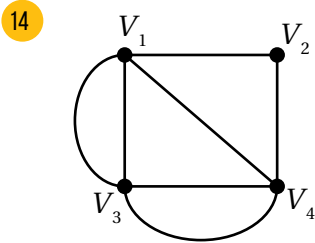


إنترنت: يُبين الشكل المجاور مُخطَّطاً لشبكة إنترنت تصل بين مجموعة من الحواسيب في إحدى المكتبات العامة. وفيه يُمثَّل العدد على كل حافة طول الكَبَل (بالمتر) بين كل جهازي حاسوب في المكتبة. أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

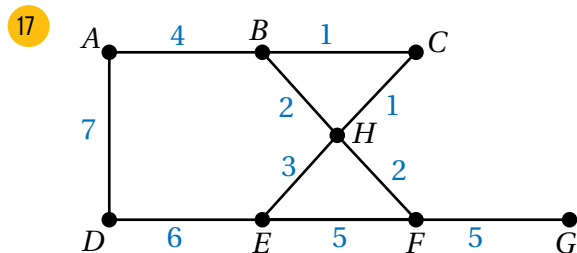
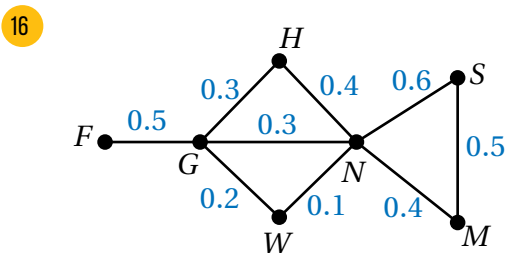
12 أَسْتَعْمَلْ خَوَازِمِيَّةَ بَرَايِمَ لِإِيْجَادِ أَصْغَرِ شَجَرَةٍ شَامِلَةٍ لِلْمُخَطَّطِ، ثُمَّ أَكْتُبِ الْحَافَاتِ الَّتِي أُضِيفَتْ إِلَى الشَّجَرَةِ بِالتَّرْتِيبِ.

13 أستمع لإجابة السؤال السابق لإيجاد أقل تكلفة تلزم لربط جميع الحواسيب في المكتبة، علمًا بأنَّ تكلفة تمديد المتر الواحد من الكَبْل 3 JD.

أُمَثِّلْ كُلَّ مُخَطَّطٍ مِمَّا يَأْتِي بِمَصْفُوفَةِ الْجَوَارِ:



أُمَثِّلْ كُلَّ مُخَطَّطٍ مِمَّا يَأْتِي بِمَصْفُوفَةِ الْوِزْنِ:



18 أرسم المخطط المُمثل في مصفوفة الجوار الآتية.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19 تُمثّل مصفوفة الوزن الآتية أطوال أنابيب المياه (بالمتر) التي تصل بين المرشّات في إحدى المزارع. أرسم المخطط الموزون الذي تُمثّله المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} - & 11 & 4 & - & - & - \\ 11 & - & - & 8 & - & - \\ 4 & - & - & 9 & - & 10 \\ - & 8 & 9 & - & 7 & - \\ - & - & - & 7 & - & 9 \\ - & - & 10 & - & 9 & - \end{bmatrix}$$

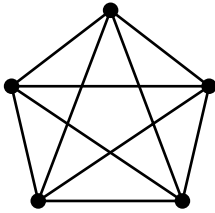
مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أرسم كلاً ممّا يأتي:

20 مخطط كامل، عدد رؤوسه 7

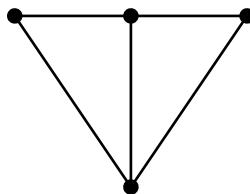
21 مخطط متصل، عدد رؤوسه 6، ودرجة كلّ منها 3

22 مخطط بسيط، غير متصل، عدد رؤوسه 6، ودرجة كلّ منها 2



23 تبرير: أرسم المخطط المُكَمَّل للمخطط المجاور، ثمّ أبرّر إجابتي.

24 تحدّد: أرسم جميع الأشجار الشاملة التي يُمكن أن تتّج من المخطط الآتي:



مُخَطَّطات أويلر Euler Graphs

فكرة الدرس

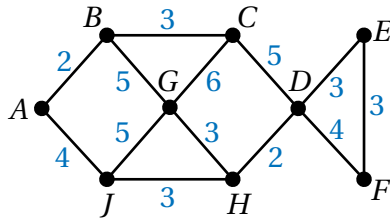


- تحديد إذا كان المُخَطَّط المُعْطَى أويلريًا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.
- تعرّف خوارزمية فحص المسار، واستعمالها لإيجاد أقصر مسار في مُخَطَّط متصل موزون يشمل كل حافة في المُخَطَّط مرّة واحدة على الأقل، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به.
- مُخَطَّط أويلري، مُخَطَّط شبه أويلري، المسار الأويلري، خوارزمية فحص المسار الأويلري.

المصطلحات



مسألة اليوم



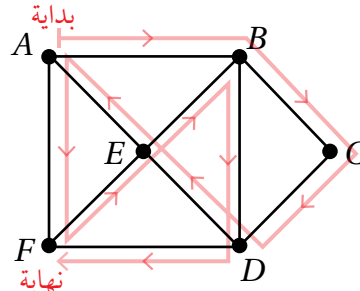
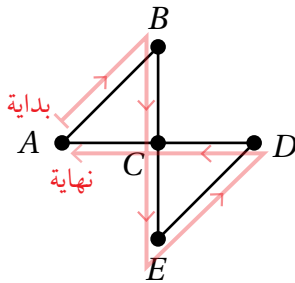
يُبيّن الشكل المجاور مُخَطَّطًا للمسارات التي تسلكها سيارّة البريد بين 9 مواقع تابعة لإحدى الشركات، ويُمثّل العدد على كل حافة تكلفة الوقود (بالدينار) الذي تستهلكه السيارّة بين كل موقعين. أُحدّد مسارًا يبدأ بالمنطقة A، وينتهي بها، ويشمل كل حافة في المُخَطَّط، بحيث تستهلك السيارّة أقل كمية من الوقود إذا سلكت هذا المسار.

المُخَطَّط الأويلري، والمُخَطَّط شبه الأويلري

تعرّفتُ سابقًا أنّ دائرة أويلر ممرٌّ رأسُ بدايته هو نفسه رأسُ نهايته، وأنّه يشمل جميع حافات المُخَطَّط من دون تكرار. وفي حال كان المُخَطَّط المتصل يحتوي على دائرة أويلر، فإنّه يُسمّى **مُخَطَّطًا أويلريًا** (Eulerian graph).

أمّا المُخَطَّط المتصل الذي يحوي ممرًّا يشمل جميع حافته من دون تكرار، ورأسُ بدايته مختلف عن رأسُ نهايته، فيُسمّى **مُخَطَّطًا شبه أويلري** (semi-Eulerian graph).

في ما يأتي مثال على مُخَطَّط أويلري، ومثال آخر على مُخَطَّط شبه أويلري.



أتذكّر

الممر هو ممشي لا تتكرّر فيه أيّ حافة، ويمكن أن تتكرّر فيه الرؤوس.

أفكر

هل تحتوي دائرة أويلر بالضرورة على جميع رؤوس المُخَطَّط؟ أبرّر إجابتي.

يصعب أحياناً تمييز المخطط الأويلري من غيره عن طريق النظر إليه فقط. وفي هذه الحالة، يُمكن الاستعانة بالنظرية الآتية:

المُخطَّط الأويلري

نظرية

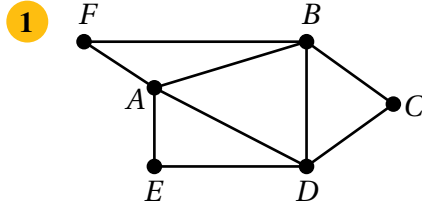
- إذا كان المخطط متصلاً، ودرجة كل رأس من رؤوسه زوجية، فإنه يكون أويلرياً.
- أما إذا كان المخطط متصلاً، ويحوي رأسين فقط، درجة كل منهما فردية، فإنه يكون شبه أويلري.
- إذا كان عدد الرؤوس ذات الدرجة الفردية في المخطط أكثر من رأسين، فإن المخطط لا يكون أويلرياً، ولا شبه أويلري.
- إذا لم يكن المخطط متصلاً، فإنه لا يكون أويلرياً، ولا شبه أويلري.



سُمِّي المخطط الأويلري بهذا الاسم نسبةً إلى مُكتشفه عالم الرياضيات السويسري ليونارد أويلر الذي عاش في القرن الثامن عشر الميلادي، ووضع نظرية المخططات.

مثال 1

أتأمل كل مخطط ممّا يأتي، ثمَّ أحدّد إذا كان أويلرياً، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.



الخطوة 1: أحدّد إذا كان المخطط متصلاً أم لا.

المخطط متصل، إذن يُمكن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك).

الخطوة 2: أحدّد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	4	زوجية
B	4	زوجية
C	2	زوجية
D	4	زوجية
E	2	زوجية
F	2	زوجية

أتعلّم

من المستحيل أن يكون المخطط أويلرياً وشبه أويلري في الوقت نفسه.

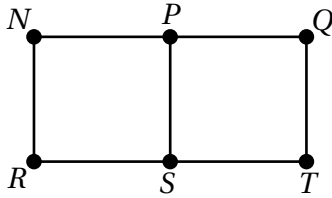
الخطوة 3: أٌحدّد نوع المُخطّط استنادًا إلى درجات الرؤوس.

بما أنّ جميع درجات رؤوس المُخطّط زوجية، فإنّ المُخطّط أويلري.

أفكر

أُحدّد دائرة أويلر من المُخطّط.

2



الخطوة 1: أٌحدّد إذا كان المُخطّط متصلًا أم لا.

المُخطّط متصل، إذن يُمكن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك).

الخطوة 2: أٌحدّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطّط، ونوعها.

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
N	2	زوجية
P	3	فردية
Q	2	زوجية
R	2	زوجية
S	3	فردية
T	2	زوجية

الخطوة 3: أٌحدّد نوع المُخطّط استنادًا إلى درجات الرؤوس.

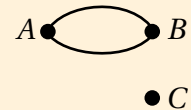
بما أنّه يوجد رأسان فقط، درجة كلّ منهما فردية، فإنّ المُخطّط شبه أويلري.

أفكر

أُحدّد ممراً شبه أويلري من المُخطّط.

أتعلّم

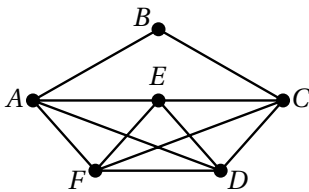
عندما نتحدّث عن المُخطّطات الأويلرية أو المُخطّطات شبه الأويلرية، فإنّنا نهتمُّ فقط بالمُخطّطات المتصلة. فمثلاً، المُخطّط الآتي يحوي دائرة أويلر، لكنّه ليس مُخطّطاً أويلريّاً؛ لأنّه غير متصل.



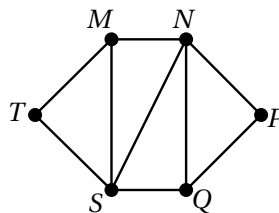
أتحقّق من فهمي

أتأمّل كل مُخطّط ممّا يأتي، ثمّ أٌحدّد إذا كان أويلريّاً، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.

a)



b)



إيجاد طول أقصر مسار في مُخطَّط أويلري أو مُخطَّط شبه أويلري

المسار الأويلري (Eulerian route) هو مسار في المُخطَّط يشمل كل حافة في المُخطَّط

مرّة واحدة على الأقل، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به. يُمكن استعمال **خوارزمية فحص**

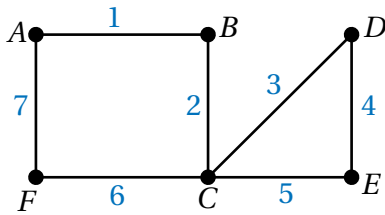
المسار الأويلري (Eulerian route inspection algorithm) لإيجاد طول أقصر مسار

أويلري في مُخطَّط متصل موزون. أمّا إذا كان المُخطَّط أويلريًا، فإنّ أقصر مسار أويلري فيه يكون دائرة أويلر، وهو مسار يتضمّن جميع حافات المُخطَّط، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به. ومن ثمّ، فإنّ طول أقصر مسار أويلري يساوي الوزن الكلي للمُخطَّط. وأمّا إذا كان المُخطَّط شبه أويلري، فإنّ طول أقصر مسار أويلري فيه يكون الوزن الكلي للمُخطَّط، مضافًا إليه مجموع أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذين درجتها فردية؛ وذلك لضمان البدء بنفس الرأس والانتهاء به.

أتذكّر

الطريق ممر لا يتكرّر فيه أيّ رأس.

مثال 2



1 أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط

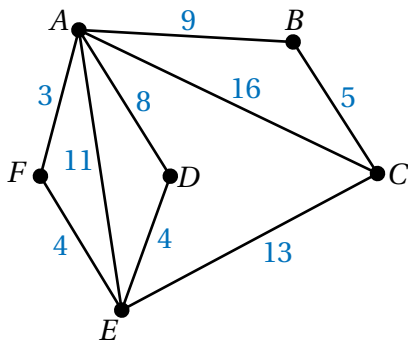
الموزون المجاور، يبدأ بالرأس F ، وينتهي به.

ألاحظ من المخطّط أنّ درجة كل رأس من

رؤوسه زوجية؛ ما يعني أنّ المُخطَّط أويلري. ومنه، فإنّ طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط يساوي الوزن الكلي للمُخطَّط.

$$7 + 1 + 2 + 6 + 3 + 4 + 5 = 28$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس F ، وينتهي به، هو: 28 وحدة.



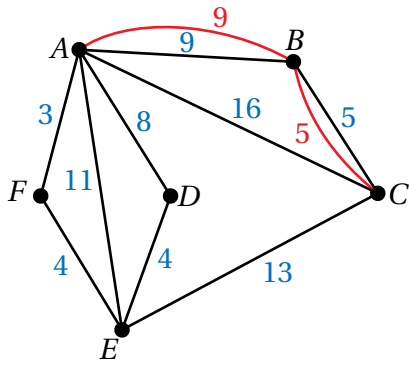
2 أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط

الموزون المجاور، يبدأ بالرأس E ، وينتهي به.

ألاحظ من المُخطَّط وجود رأسين فقط، درجة كلّ منهما فردية؛ ما يعني أنّ المُخطَّط شبه أويلري.

أتعلّم

الوزن الكلي للمُخطَّط الموزون هو مجموع أوزان جميع حافته.



الخطوة 1: أكرّر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذين درجتهم فردية في المخطط.

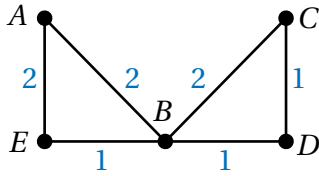
الرأسان اللذان درجتهم فردية هما: A و C، وأقصر طريق يصل بينهما هو: ABC؛ لذا أكرّر حافات هذا الطريق في المخطط كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمخطط الناتج.

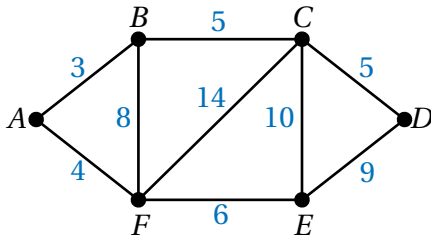
$$3 + 9 + 9 + 5 + 5 + 16 + 13 + 4 + 8 + 11 + 4 = 87$$

إذن، طول أقصر مسار أوليري في المخطط، يبدأ بالرأس E، وينتهي به، هو: 87 وحدة.

أتحقق من فهمي



(a) أجد طول أقصر مسار أوليري في المخطط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس D، وينتهي به، ويشمل كل حافة من حافته.



(b) أجد طول أقصر مسار أوليري في المخطط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس F، وينتهي به، ويشمل كل حافة من حافته.

أتعلم

إن إضافة الوزن 5 و 9 لا تعني أننا أضفنا حافات جديدة إلى المخطط، وإنما تعني أن المسار قد احتوى على هاتين الحافتين مكررتين حتى يتمكن من البدء بنفس الرأس والانتهاء به.

أتعلم

يُمكن للمسار الأوليري أن يشمل الحافة أكثر من مرة، ولكن يجب أن يبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به.

أتعلم

عندما نتحدث عن المسار الأوليري، فإننا نهتم فقط بالمخططات المتصلة؛ فإذا لم يكن المخطط متصلاً، فإنه لا يحوي مساراً أوليرياً.

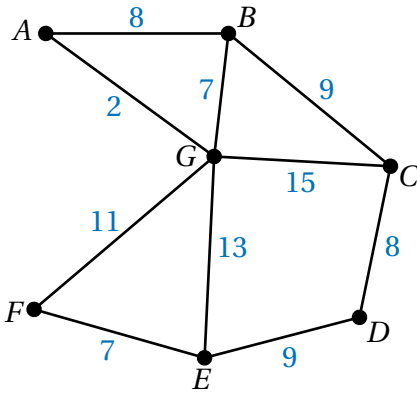
إيجاد طول أقصر مسار أوليري في مخطط متصل غير أوليري ولا شبه أوليري

تعلمت في المثال السابق استعمال خوارزمية فحص المسار الأوليري لإيجاد طول أقصر مسار أوليري في مخطط أوليري أو مخطط شبه أوليري. والآن سأتعلم كيف يُمكن إيجاد طول أقصر مسار أوليري في مخطط غير أوليري ولا شبه أوليري.

يُمكن إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط متصل غير أويلري ولا شبه أويلري باستعمال خوارزمية فحص المسار، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية:

- 1 تحديد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط.
- 2 تحديد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية (حتى تصبح درجات جميع الرؤوس زوجية)، ثمَّ إيجاد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.
- 3 اختيار الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطَّط وزنها أقل ما يُمكن، ثمَّ إضافة هذه الحافات إلى المُخطَّط.
- 4 إيجاد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج الذي يساوي طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط.

مثال 3 : من الحياة



أنابيب ري: يُبين الشكل المجاور مُخطَّطاً لأنابيب كبيرة تصل بين النقاط الرئيسة في إحدى المزارع. وفيه يُمثَّل العدد على كل حافة طول الأنبوب (بالمتر) بين كل نقطتين. يُراد تنظيف الأنابيب من الداخل بالآلة تحوي خرطومًا رقيقًا مرناً في مُقدِّمته أداة لضخ الماء بضغط عالٍ في اتجاه الجدران الداخلية للأنابيب الكبيرة

لتنظيفها من الداخل. إذا علمتُ أنَّه يُمكن إدخال الخرطوم في النقطة B وإخراجه منها فقط، فأجد أقل طول من الخرطوم يلزم لتنظيف جميع الأنابيب الكبيرة في المزرعة.

بما أنَّه لا يُمكن إدخال الخرطوم إلّا في الرأس B وإخراجه من هذا الرأس فقط، وبما أنَّه يجب تنظيف جميع الأنابيب؛ فإنَّه يُمكن استعمال خوارزمية فحص المسار الأويلري لإيجاد أقصر طول لازم من الخرطوم (أقصر مسار يحوي جميع حافات المُخطَّط).
ألاحظ من المُخطَّط وجود أكثر من رأسين، درجة كلٍّ منها فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط ليس أويلرياً ولا شبه أويلري.

الخطوة 1: أحدد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط.

الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط هي: B, C, E, G .

معلومة

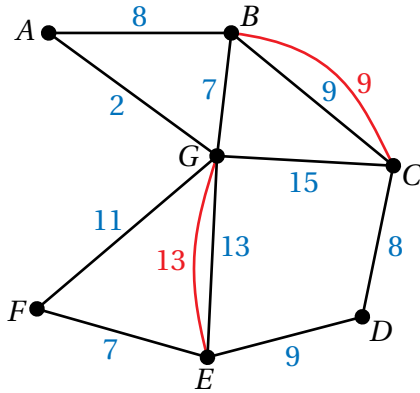


آلة تنظيف الأنابيب هي جهاز كهربائي مُزوَّد بأنبوب مرّن ذي رأس معدني دوّار، يعمل على ضَخّ الماء بضغط عالٍ في جميع الاتجاهات. تُستعمل هذه الآلة بفعالية لتنظيف أنابيب مياه الريّ وإزالة الانسدادات في أنظمة الصرف الصّحّي.

الخطوة 2: أحدد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثم أجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

مجموع أوزان الحافات المضافة	الحافات المضافة	الطريقة الأولى
$9 + 13 = 22$	BC, GE	الطريقة الأولى
$7 + 17 = 24$	BG, CE	الطريقة الثانية
$20 + 15 = 35$	BE, CG	الطريقة الثالثة

ملحوظة: طول الحافة CE المضافة في الطريقة الثانية يساوي مجموع طولي الحافتين CD و DE بحيث يكون طول المسار بين هذين الرأسين أقصر ما يمكن، وطول الحافة BE المضافة في الطريقة الثالثة يساوي مجموع طولي الحافتين GE و BG .



الخطوة 3: أختار الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن، ثم أضيف هذه الحافات إلى المخطط.

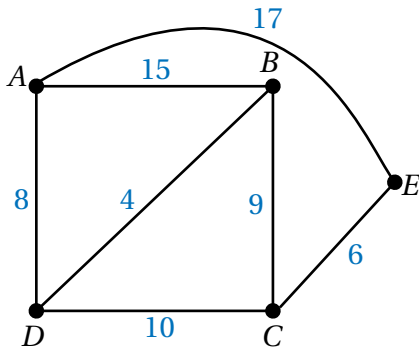
الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن هي الطريقة الأولى؛ لذا أكرر حافات هذه الطريقة في المخطط كما في الشكل المجاور.

الخطوة 4: أجد الوزن الكلي للمخطط الناتج.

$$8 + 9 + 9 + 8 + 9 + 7 + 11 + 2 + 7 + 15 + 13 + 13 = 111$$

إذن، أقل طول من الخرطوم يلزم لتنظيف جميع الأنابيب الكبيرة في المزرعة هو: 111 m

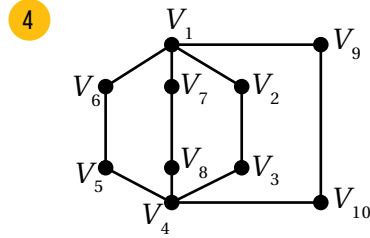
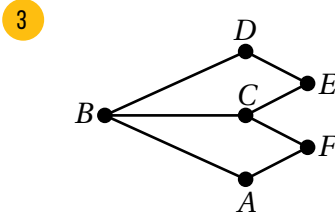
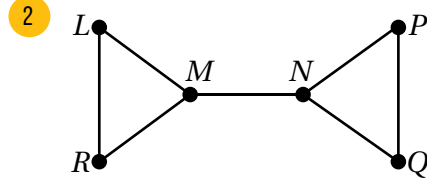
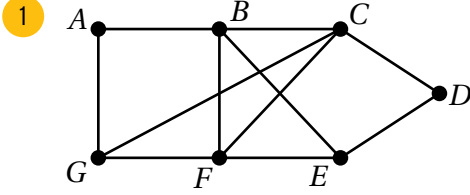
أتحقق من فهمي



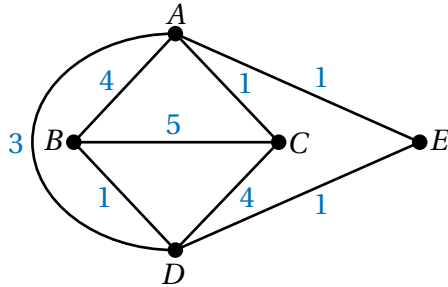
طرق: يُبين الشكل المجاور مخططاً للطرق الرئيسة بين مجموعة من المناطق. وفيه يُمثّل العدد على كل حافة المسافة (بالكيلومتر) بين كل منطقتين. أجد طول أقصر مسار يبدأ بالمنطقة A، وينتهي بها، ويشمل كل حافة في المخطط.



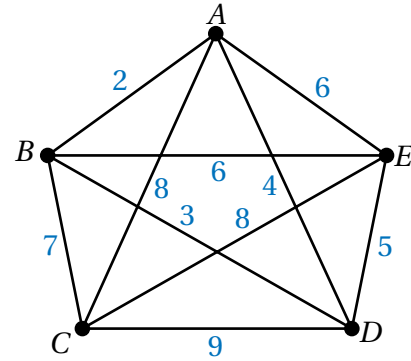
أَتَأْمَلُ كُلَّ مُخَطَّطٍ مِمَّا يَأْتِي، ثُمَّ أُحَدِّدُ إِذَا كَانَ أَوِيلِرِيًّا، أَوْ شَبْهُ أَوِيلِرِي، أَوْ غَيْرَ ذَلِكَ:



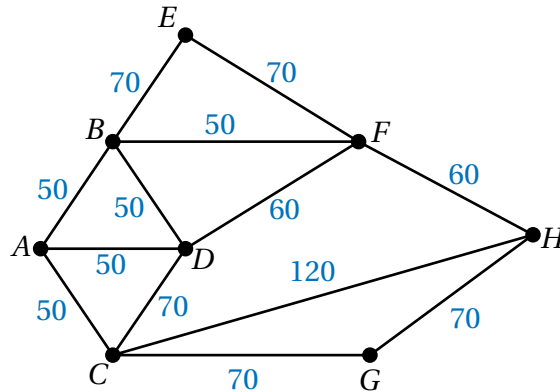
6 أجد طول أقصر مسار أويلري في المخطط الموزون الآتي، يبدأ بالرأس B ، وينتهي به.

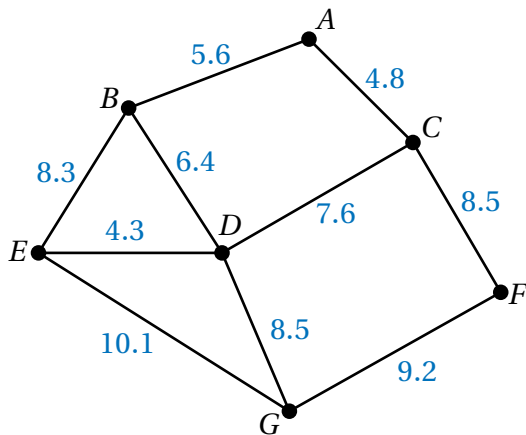


5 أجد طول أقصر مسار أويلري في المخطط الموزون الآتي، يبدأ بالرأس A ، وينتهي به.



7 طرق: يُبَيِّنُ الشكل التالي مخططًا للطرق الرئيسة بين مجموعة من المدن. وفيه يُمَثَّلُ العدد على كل حافة المسافة (بالكيلومتر) بين كل مدينتين. أجد طول أقصر مسار أويلري يبدأ بالمدينة A ، وينتهي بها.





8 **أنفاق:** يُبين الشكل المجاور مُخطَّطاً لأنفاق تصريف مياه الأمطار في إحدى المدن. وفيه يُمثَّل العدد على كل حافة طول النفق بالكيلومتر. إذا علمتُ أنَّ الفريق الهندسي المسؤول عن صيانة الأنفاق يرغب في فحصها قبل حلول فصل الشتاء للتحقق من عدم انسدادها، وأنَّه يتعيَّن على الفريق المرور بكل نفق مرَّة واحدة على الأقل، وأنَّه سيبدأ مهمته من الرأس A ، وينتهي به؛ فأجد طول أقصر مسار يُمكن أن يمرَّ به الفريق لإنجاز مهمته.

9 أحلَّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

10 **أكتشف الخطأ:** قالت سلمى: "إنَّ أيَّ مُخطَّط كامل K_n ، حيث $n > 2$ ، هو مُخطَّط أويلري". أكتشف الخطأ في قول سلمى، ثمَّ أصحَّحه.

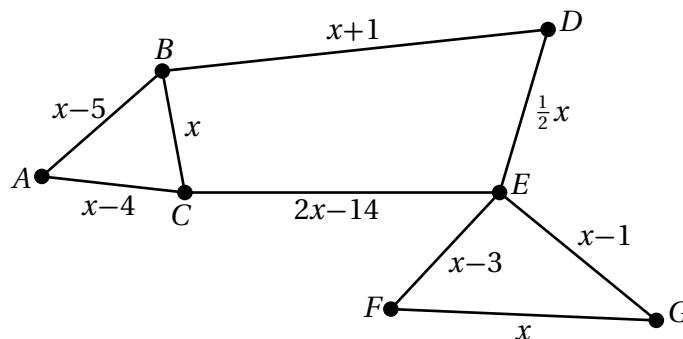
تبرير: أتنامل مصفوفة الجوار المجاورة التي تُمثِّل مُخطَّطاً غير موزون، ثمَّ أجيب عن السؤالين الآتين تبعاً من دون رسم المُخطَّط:

11 هل المُخطَّط متصل؟ أبرِّر إجابتي.

12 هل المُخطَّط أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك؟ أبرِّر إجابتي.

إرشاد: أستعين بالمصفوفة لكتابة مجموعة درجات رؤوس المُخطَّط.

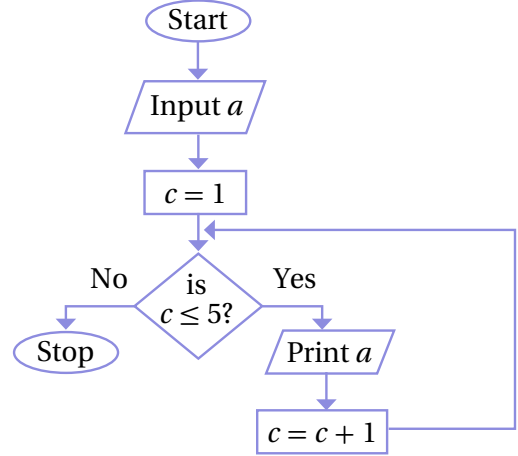
13 **تحذُّر:** يُبين الشكل التالي مُخطَّطاً موزوناً يُمثِّل المسافات بين مجموعة من المناطق بالكيلومتر. إذا كان طول أقصر مسار في المُخطَّط باستعمال خوارزمية فحص المسار هو 100 km، فأجد قيمة الثابت الحقيقي x .



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 إحدى التالية تُمثّل وصفاً لمُخرجات الخوارزمية الآتية:



(a) الأعداد من 1 إلى 5

(b) العدد a مُكرَّرًا 5 مرّات.

(c) الأعداد من 1 إلى 4

(d) العدد a مُكرَّرًا 4 مرّات.

2 يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في

صناديق، ارتفاع كل منها 19 وحدة طول. إذا علمتُ

أنَّ للُعب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فإنَّ عدد

الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال خوارزمية

الملاءمة الأولى هو:

11 2 15 5 6 17 7 12

(a) 3

(b) 4

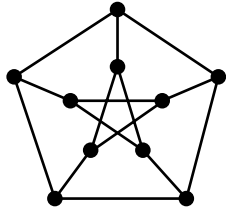
(c) 5

(d) 6

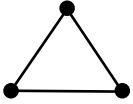
3 الذي يُمثّل مُخطّطًا

جزئيًا من المُخطّط

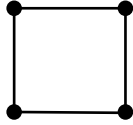
المجاور هو:



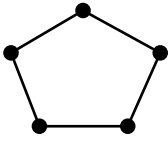
(a)



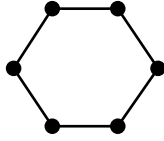
(b)



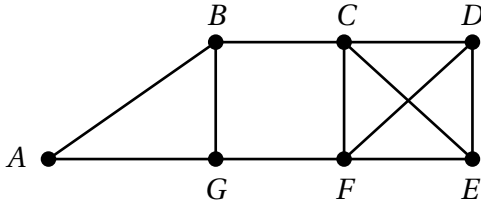
(c)



(d)



4 الذي يُمثّل ممراً في المُخطّط الآتي هو:



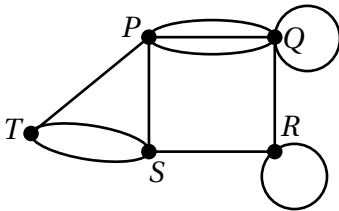
(a) ABCDCB

(b) ABCDFCB

(c) ABCFGA

(d) ABCDECB

5 مجموع درجات رؤوس المُخطّط الآتي يساوي:



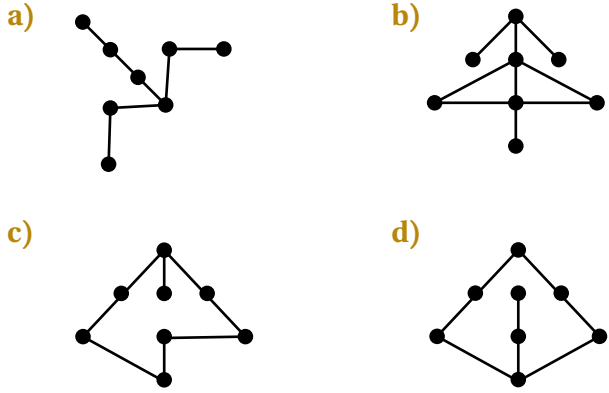
(a) 18

(b) 20

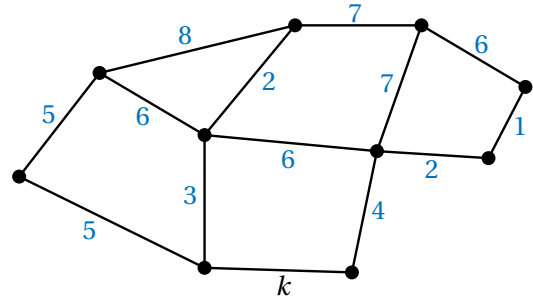
(c) 22

(d) 24

6 الذي يُمثّل شجرة في ما يأتي هو:

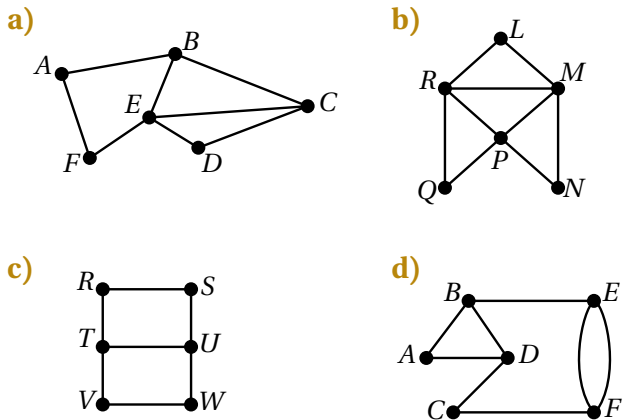


7 إذا كان وزن أصغر شجرة شاملة للمُخطّط الآتي، تمرّ بالحافة التي وزنها k ، هو 33، فإنّ قيمة الثابت k تساوي:



a) 1 b) 2 c) 4 d) 5

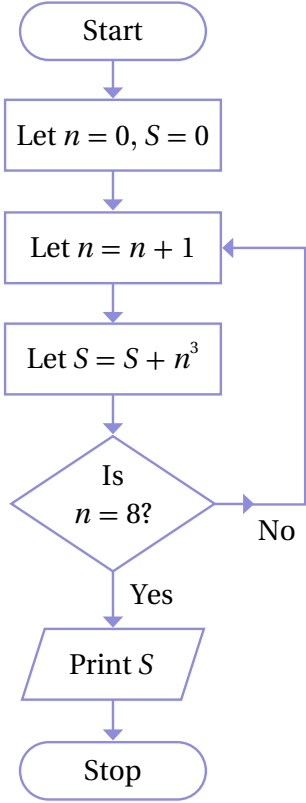
8 المُخطّط الأويلري من المُخطّطات الآتية هو:



أتملّ الخوارزمية المجاورة المُمثّلة بمُخطّط سَير العمليات، ثمّ أُجيب عن كلّ ممّا يأتي:

9 أُنطبق الخوارزمية باستعمال جدول التَّبَع لإيجاد مُخرَجهَا.

10 أَصِف مُخرَج الخوارزمية.



11 أُنطبق الخوارزمية الآتية باستعمال جدول التَّبَع لإيجاد مُخرَجاتها عندما $P = 400$, $R = 5$, $T = 3$.

1. Input P, R, T
2. Let $A = P, K = 0$
3. Let $K = K + 1$
4. Let $I = (A \times R) / 100$
5. Let $A = A + I$
6. If $K < T$, go to step 3
7. Let $M = A / (12 \times T)$
8. Print M
9. Stop

شحن: في ما يأتي كتل 10 صناديق (بالكيلوغرام) يُراد نقلها في شاحنات، ويُمكن لكل منها أن تحمل كتلة إجمالية أقصاها 300 kg:

175 135 210 105 100 150 60 20 70 125

12 أُحَدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمَّ أُحَدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

13 أُحَدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة، ثمَّ أُحَدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

14 أُحَدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحَدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

15 أيُّ الخوارزميات توصلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرِّر إجابتي.

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 5 وحدات طول. إذا علمتُ أنَّ للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأجيب عن الأسئلة التالية تبعاً:

2.6 0.8 2.1 1.2 0.9 1.7 2.3 0.3 1.8 2.7

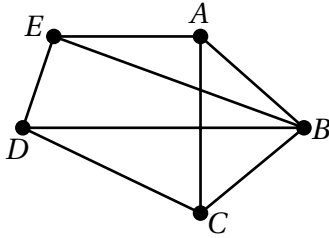
16 أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أُحَدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

17 أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أُحَدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

18 أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أُحَدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

19 أيُّ الخوارزميات توصلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرِّر إجابتي.

أتأمل المخطط الآتي، ثمَّ أُجيب عن كلِّ ممَّا يلي:



20 أُحَدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

21 أُحَدِّد درجة كل رأس، ونوعها.

22 أُحَدِّد مجموعة الدرجات للمخطط.

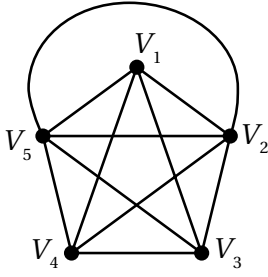
23 أرسم مخططين جزئيين من المخطط.

24 أُحَدِّد من المخطط ممسّى لا يُمثّل ممراً، وممراً لا يُمثّل طريقاً، وطريقاً، ودائرة، ودائرة هاملتون تبدأ بالرأس A، ودائرة أويلر (إن وُجدت).

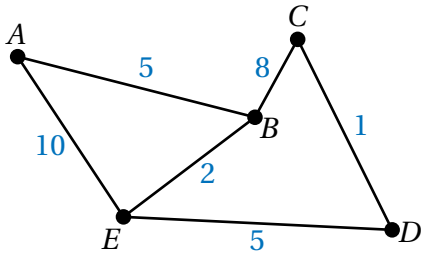
25 هل المخطط متصل؟ أبرِّر إجابتي.

26 هل المخطط بسيط؟ أبرِّر إجابتي.

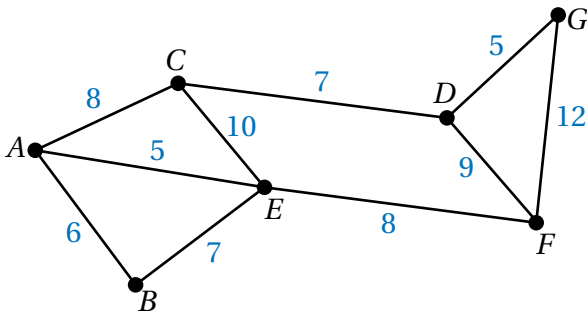
32 أمثل المخطط الآتي بمصفوفة الجوار.



33 أمثل المخطط الآتي بمصفوفة الوزن.



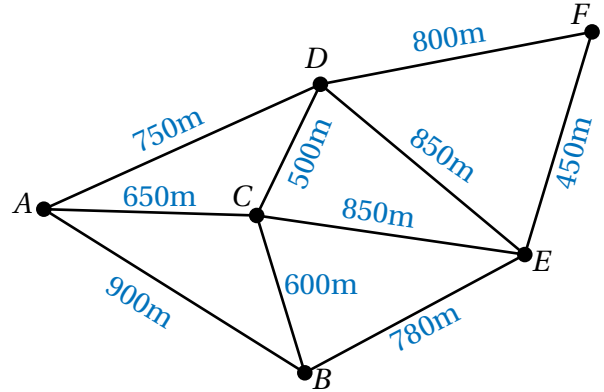
34 يُبين المخطط الموزون التالي أطوال الطرق التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن بالكيلومتر. أجد طول أقصر مسار أوليري يبدأ بالمنطقة A، وينتهي بها.



27 أرسم شجرتين للمخطط.

28 أرسم شجرتين شاملتين للمخطط.

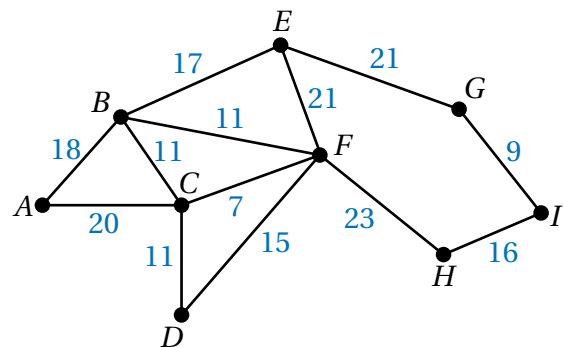
يُبين الشكل الآتي مخططاً لـ 6 منازل في إحدى القرى. وفيه يُمثل العدد على كل حافة المسافة (بالمتر) بين كل منزلين:



29 أجد طول المسار المباشر بين المنزل E والمنزل D.

30 أجد طول أقصر مسار بين المنزل B والمنزل D، والمسار الذي اتخذته لذلك.

31 يُبين المخطط الموزون التالي أطوال الطرق التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن بالكيلومتر. أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمخطط، ثم أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.



ما أهمية هذه الوحدة؟

طُوِّرت نظرية البرمجة الخطية في بداية الحرب العالمية الثانية عام 1939م، واستُعملت لتقليل التكلفة وزيادة الإنتاجية في كثير من المجالات، وقد استفادت منها الشركات التجارية في جَنِّي مزيد من الأرباح وتقليل الخسائر، وكذلك جدولة رحلات الطيران، وإنشاء خطوط الهاتف.

تعلّمتُ سابقًا:

- ✓ حلّ متباينة خطّية بمتغيّر واحد، وتمثيلها على خطّ الأعداد.
- ✓ تمثيل متباينة خطّية بمتغيّرين في المستوى الإحداثي.
- ✓ حلّ نظام مُكوّن من معادلتين خطّيتين بمتغيّرين.
- ✓ تمثيل نظام مُكوّن من معادلتين خطّيتين بمتغيّرين بيانيًا.

سأتعلّم في هذه الوحدة:

- ◀ حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين بيانيًا.
- ◀ حلّ نظام مُكوّن من متباينات خطّية بمتغيّرين باستعمال برمجة جبراً.
- ◀ حلّ مسائل حياتية عن البرمجة الخطّية.

أستعمل تدريبات (أستعد لدراسة الوحدة) في الصفحات (39–36) من كتاب التمارين؛ لمراجعة هذه الموضوعات قبل البدء بدراسة الوحدة.

الدرس 1

حل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً Solving System of Linear Inequalities in Two Variables Graphically

حل نظام مكون من متباينات خطية بمتغيرين بيانياً.

فكرة الدرس

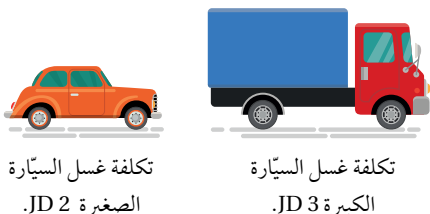


نظام المتباينات الخطية، مجموعة الحل.

المصطلحات



مسألة اليوم



تكلفة غسل السيارة
الصغيرة JD 2.

تكلفة غسل السيارة
الكبيرة JD 3.

قدم محل لتبديل زيوت السيارات عرضاً مجانياً لغسل السيارات. إذا كان الحد الأقصى لذلك العرض هو غسل 30 سيارة يومياً، بتكلفة لا تزيد على JD 75، فكم سيارة كبيرة وصغيرة يمكن غسلها يومياً بحسب هذا العرض؟

يتكوّن نظام المتباينات الخطية (system of linear inequalities) من متباينتين خطيتين أو أكثر. ويُطلق على مجموعة الأزواج المرتبة التي تُحقّق جميع المتباينات اسم مجموعة الحل (solution set). فمثلاً، يتكوّن النظام الآتي من ثلاث متباينات خطية:

$$x + y < 2$$

المتباينة الخطية الأولى

$$-2x + y > -1$$

المتباينة الخطية الثانية

$$x - 3y \leq -2$$

المتباينة الخطية الثالثة

يُمثّل الزوج المرتب $(-1, 2)$ أحد حلول هذا النظام؛ لأنّه يُحقّق المتباينات جميعها.

$$-1 + 2 = 1 < 2 \quad \checkmark$$

الزوج المرتب يُحقّق المتباينة الخطية الأولى

$$-2(-1) + 2 = 4 > -1 \quad \checkmark$$

الزوج المرتب يُحقّق المتباينة الخطية الثانية

$$-1 - 3(2) = -7 \leq -2 \quad \checkmark$$

الزوج المرتب يُحقّق المتباينة الخطية الثالثة

أتعلّم

يوجد عدد لانهائي من الأزواج المرتبة التي تُحقّق هذا النظام، وليس $(-1, 2)$ فقط.

لغة الرياضيات

تدُلّ جملة (الزوج المرتب يُحقّق متباينة) على أنّ المتباينة تكون صحيحة عند تعويض هذا الزوج فيها.

لحلّ نظام متباينات، أمثّل كل متباينة فيه بيانياً في المستوى الإحداثي نفسه، ثمّ أظلل المنطقة المشتركة بين مناطق حلّ المتباينات جميعها؛ إذ تُمثّل هذه المنطقة مجموعة حلّ النظام.

مثال 1

أمثل منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثمّ أنحقّق من صحّة الحلّ:

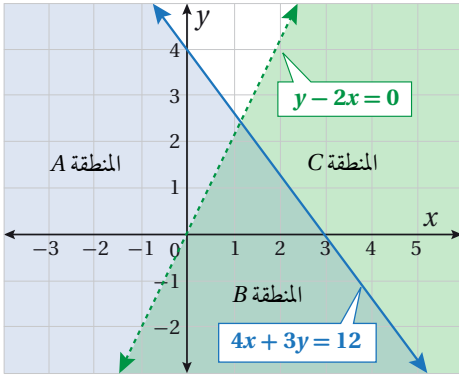
$$4x + 3y \leq 12$$

$$y - 2x < 0$$

الخطوة 1: أمثل المستقيمين الحدوديين.

$$4x + 3y = 12$$

$$y - 2x = 0$$



أمثل بيانيًا المستقيمين الحدوديين في المستوى الإحداثي نفسه، وأستعمل لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحلّ كما في الشكل المجاور.

أتذكّر

إذا تضمّنت المتباينة رمز < أو رمز >، فإنّ المستقيم الحدودي لا يدخل ضمن منطقة الحلّ، ويكون تمثيله بخطّ مُتَقَطَّع.

الخطوة 2: أحدّد منطقة التقاطع بين حلّي المتبايتين.

ألاحظ أنّ حلّ المتباينة: $4x + 3y \leq 12$ هو المنطقتان A و B، وأنّ حلّ المتباينة: $y - 2x < 0$ هو المنطقتان B و C. إذن، المنطقة B المشتركة بين منطقتي حلّ المتبايتين هي منطقة حلّ نظام المتباينات.

الخطوة 3: أنحقّق من صحّة الحلّ.

أنحقّق من صحّة الحلّ باختيار زوج مُرتَّب يقع في منطقة حلّ النظام (المنطقة B)، مثل $(2, -1)$ ، ثمّ تعويضه في متباينات النظام جميعها:

$$4x + 3y \leq 12$$

$$4(2) + 3(-1) \stackrel{?}{\leq} 12$$

$$5 \leq 12 \quad \checkmark$$

$$y - 2x < 0$$

$$-1 - 2(2) \stackrel{?}{<} 0$$

$$-5 < 0 \quad \checkmark$$

المتباينة الخطيّة الأولى

بالتعويض

ناتج التعويض يُحقّق المتباينة

المتباينة الخطيّة الثانية

بالتعويض

ناتج التعويض يُحقّق المتباينة

أتذكّر

للتحقّق من صحّة الحلّ، يجب تعويض زوج مُرتَّب من منطقة الحلّ في متباينات النظام جميعها.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أُمَثِّلُ منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي، ثُمَّ أَتَحَقَّقُ مِنْ صِحَّةِ الحَلِّ:

$$2x - 4y \geq -5$$

$$x + 7y < 7$$

إرشاد: أَسْتَعْمِلُ أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أَتَذَكَّرُ

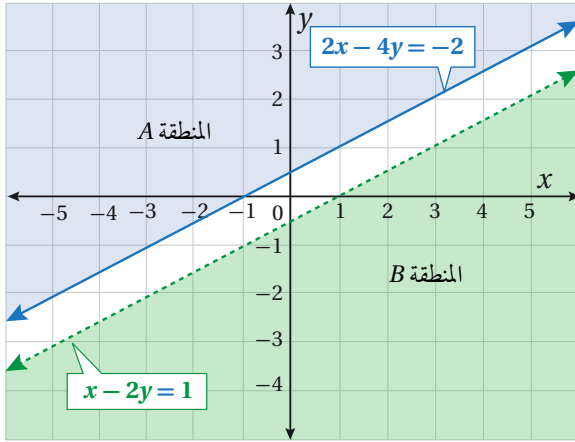
يُرْمَزُ إلى المجموعة الخالية بالرمز $\{\}$ ، أو الرمز $\emptyset$ (تُقرأ: فاي)؛ وهي مجموعة لا تحوي عناصر.

مثال 2

أُمَثِّلُ منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$2x - 4y \leq -2$$

$$x - 2y > 1$$



أُمَثِّلُ بيانياً المستقيمين الحدوديين الآتين في المستوى الإحداثي نفسه:

$$2x - 4y = -2$$

$$x - 2y = 1$$

وَأَسْتَعْمِلُ لونين مختلفين لتظليل منطقتي الحلّ كما في الشكل المجاور.

أُلاحِظُ أَنَّ حَلَّ المتباينة: $2x - 4y \leq -2$ هو المنطقة A، وَأَنَّ حَلَّ المتباينة: $x - 2y > 1$ هو المنطقة B، وَأَنَّهُ لَا يَوْجَدُ تقاطع بين منطقتي حلّ المتباينتين. إِذْنِ، المجموعة الخالية $\emptyset$ هي منطقة حلّ النظام.

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي

أُمَثِّلُ منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي:

$$5x - 2y < 3$$

$$2.5x - y \geq 2$$

إرشاد: أَسْتَعْمِلُ أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أَتَعَلَّمُ

أُلاحِظُ مِنَ المتباينة الثانية في هذا المثال أَنَّ $2x - 4y > 2$ وهذا يُناقِضُ المتباينة الأولى $2x - 4y \leq -2$ ؛ مَا يَعْنِي عدم وجود أيّ زوج مُرتَّبٍ يُمَكِّنُ أَنْ يُحَقَّقَ المتباينتين في الوقت نفسه.

قد يحوي النظام أكثر من متباينتين، عندئذٍ تكون منطقة الحل هي المنطقة المُشتركة بين مناطق حل المتباينات جميعها.

مثال 3

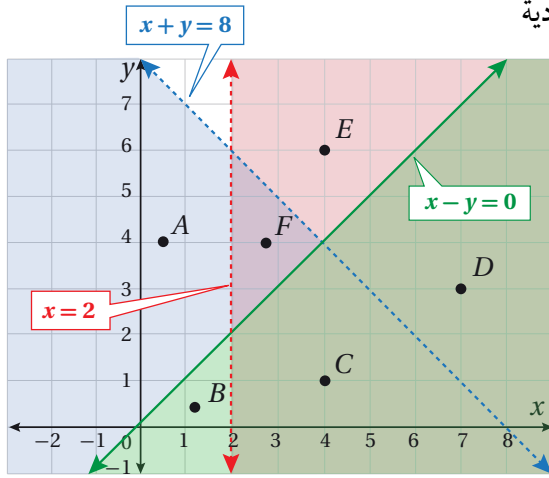
أمثل بيانيًا منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

$$x - y \geq 0$$

$$x + y < 8$$

$$x > 2$$

الخطوة 1: أمثل بيانيًا المستقيمات الحدودية



الآتية في المستوى
الإحداثي نفسه كما في
الشكل المجاور:

$$x - y = 0$$

$$x + y = 8$$

$$x = 2$$

الخطوة 2: أحدّد منطقة الحل.

أظلل منطقة حل المتباينة: $x + y < 8$ باللون الأزرق، وهي المناطق: A, B, C, F.

أظلل منطقة حل المتباينة: $x - y \geq 0$ باللون الأخضر، وهي المناطق: B, C, D.

أظلل منطقة حل المتباينة: $x > 2$ باللون الزهري، وهي المناطق: C, D, E, F.

ألاحظ أنّ المنطقة C هي المنطقة المُشتركة بين مناطق حل المتباينات الثلاث. إذن، هي منطقة حل النظام.

أتعلّم

إذا تكوّن نظام المتباينات الخطيّة بمُتغيّرين من متباينتين فقط، ولم يكن للنظام حل، فإنّ هذا يعني بالضرورة أنّ المستقيمين الحدوديين متوازيان.

غير أنّ ذلك لا ينطبق على النظام في حال وجود أكثر من متباينتين؛ إذ قد لا تتقاطع مناطق حل المتباينات بالرغم من أنّ المستقيمات غير متوازية.

أتحقّق من فهمي

أمثل بيانيًا منطقة حل نظام المتباينات الآتي:

$$-3x + 4y \geq 9$$

$$x - 5y > 6$$

$$2x - 5y < -3$$

إرشاد: أستعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

تُستعمل أنظمة المتباينات الخطية في عديد من المجالات والتطبيقات الحياتية، ويُمكن بها تحديد القيم المُمكنة للمتغيرات وفق شروط مُحددة.

مثال 4 : من الحياة



نجارة: يريد نجار شراء نوعين من المسامير، ووجد أن ثمن الكيلوغرام الواحد من النوع الأول JD 4، ومن النوع الثاني JD 6. إذا أراد شراء ما لا يقل عن 10 kg من النوعين، بحيث لا يزيد الثمن الكلي على JD 48، فأجد مقدار ما يُمكنه شراؤه من كل نوع.

يوجد في هذه المسألة متغيران مجهولان، هما: كمية المسامير من النوع الأول، وكمية المسامير من النوع الثاني، وتوجد قيود على هذين المتغيرين مُحددة بحد أدنى للكتلة الكلية لما سيشتريه النجار من النوعين، وحد أعلى لمقدار ما سيدفعه للكميتين من كلا النوعين.

الخطوة 1: أُعبر عن المسألة جبرياً بنظام من المتباينات الخطية.

أفترض أن كتلة المسامير من النوع الأول هي x ، ومن النوع الثاني هي y ، ثم أكتب نظام المتباينات الخطية المرتبط بالشروط الواردة في نص المسألة.

$$x + y \geq 10 \quad \text{لا تقل الكتلة الكلية لنوعي المسامير عن 10 kg}$$

$$4x + 6y \leq 48 \quad \text{لا يزيد الثمن الكلي لنوعي المسامير على JD 48}$$

$$x \geq 0 \quad \text{لا يُمكن أن تكون كتلة النوع الأول سالبة}$$

$$y \geq 0 \quad \text{لا يُمكن أن تكون كتلة النوع الثاني سالبة}$$

بعد تبسيط المتباينة: $4x + 6y \leq 48$ بالقسمة على 2، فإن نظام المتباينات الذي يُمثل هذه المسألة هو:

$$x + y \geq 10$$

$$2x + 3y \leq 24$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

أتعلم

نحتاج في بعض المسائل الحياتية إلى إضافة الشرطين: $x \geq 0, y \geq 0$ ؛ لأن قيم المتغيرات فيها لا يُمكن أن تكون سالبة، مثل: الكتلة، والمسافة.

لغة الرياضيات

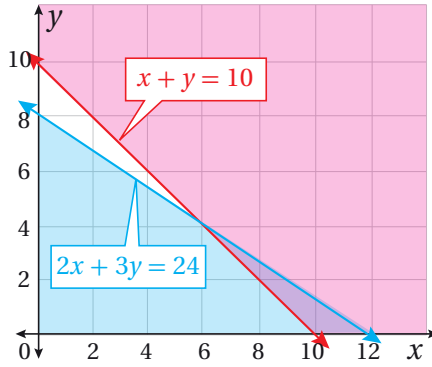
a على الأكثر تكافئ $x \leq a$ و b على الأقل $x \geq b$ تكافئ $x \geq b$.

الخطوة 2: أمثل نظام المتباينات الخطية بيانياً.

أمثل بيانياً المستقيمين الحدوديين: $x + y = 10$, $2x + 3y = 24$ في المستوى الإحداثي نفسه، وأقصر الرسم على الربع الأول؛ لأن $x \geq 0$, $y \geq 0$ ، ثم أظلل منطقة الحل لكل متباينة.

الخطوة 3: أحدد منطقة الحل.

ألاحظ أن مناطق الحل تتقاطع في منطقة مغلقة على شكل مثلث، هي منطقة حل النظام، وأن النقاط: $(9, 2)$, $(9, 1)$, $(8, 2)$, $(6, 4)$ وغيرها كثير تقع في منطقة الحل. فمثلاً، يمكن للنجار شراء 6 kg من النوع الأول، و 4 kg من النوع الثاني، أو 9 kg من النوع الأول، و 1 kg من النوع الثاني، وهكذا الحال بالنسبة إلى بقية النقاط الواقعة في منطقة الحل.



أتحقق من فهمي

محميات: يوجد في محمية للحيوانات مجموعة من الغزلان والأيائل، وقد أفاد الموظف الذي يُشرف على إطعامها والاعتناء بها أن:

- في المحمية 6 حيوانات على الأقل.
- عدد الحيوانات في المحمية لا يزيد على 12 حيواناً.
- عدد الغزلان في المحمية أقل من عدد الأيائل.
- في المحمية اثنين من الغزلان على الأقل.

(a) ما أقل عدد ممكن من الأيائل؟

(b) ما أكثر عدد ممكن من الغزلان؟

إرشاد: أستمعمل أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أفكر

أكتب قائمة تحوي جميع النقاط التي يمكن أن تكون حلولاً ممكنة لنظام المتباينات الخطية.



تُعَدُّ محمية الغزلان في ديبين إحدى أكبر المحميات الطبيعية في الأردن.



أُمَثِّلْ مَنْطَقَةَ حُلِّ كُلِّ مِنْ أَنْظِمَةِ الْمَتَبَايِنَاتِ الْآتِيَةِ:

1 $x + 3y > 1$

$5x - y \leq 2$

2 $-3x - 12y > -9$

$x + 4y \geq 5$

3 $x - 11y < 6$

$-2x + 22y > -12$

4 $3x + 5y \leq 1$

$3x + 5y \leq 3$

5 $2x - 7y > 2$

$2x - 7y \leq 2$

6 $13x - y < 11$

$x + y \geq 0$

7 $9x - y < 2$

$x + 3y > -1$

$x - y > -3$

8 $5x - 5y < 2$

$2x - 2y > 1$

$x \geq y$

9 $x \leq y$

$x - 5y < 6$

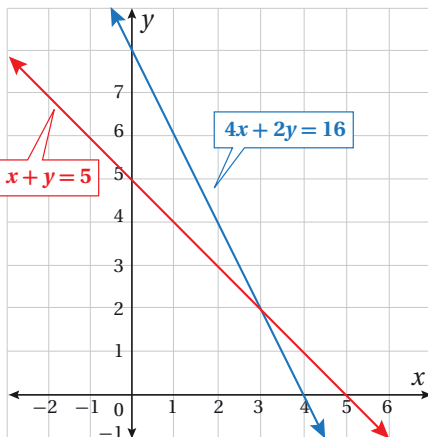
$10x - y > 3$

إرشاد: أَسْتَعْمَلْ أَوْرَاقَ الرَّسْمِ الْبَيَانِي الْمَوْجُودَةَ فِي نَهَايَةِ كِتَابِ التَّمَارِينِ.



10 **سياحة:** تبلغ تكلفة تذكرة ركوب قارب سياحي دينارين للبالغين، ودينارًا واحدًا للأطفال، ويتسع القارب لـ 10 أشخاص على الأكثر. إذا كانت x تُمثِّل عدد البالغين، ولا تُمثِّل عدد الأطفال، فكم شخصًا من البالغين والأطفال قد يوجد على متن القارب، علمًا بأن ربيع بيع التذاكر أقل من JD 12؟

11 **نقل جوي:** سعر تذكرة الدرجة السياحية للسفر بالطائرة بين مدينتي عمّان والعقبة JD 25، وسعر تذكرة الدرجة الخاصة JD 50. إذا كان ربيع بيع التذاكر JD 1600 على الأقل، وبيعت 50 تذكرة على الأكثر، فأجد عدد التذاكر المُمكن لكل درجة.



12 أظلل منطقة حل النظام الآتي من المتباينات في الشكل المجاور، ثم أكتب جميع حلول النظام المُمكنة، علمًا بأن x و y عدنان صحيحان موجبان:

$x + y \geq 5$

$4x + 2y \leq 16$

- 13 **جامعات:** أرادت سامية الالتحاق بجامعة تشترط عقد امتحاني قبول لذلك؛ أحدهما في مبحث الرياضيات، والآخر في مبحث اللغة الإنجليزية، وإحراز ما بين 900 نقطة و1200 نقطة في الامتحانين معاً؛ شرط ألا يقل المجموع في امتحان الرياضيات عن 600 نقطة، وألا يقل المجموع في امتحان اللغة الإنجليزية عن 200 نقطة. أجد عدد النقاط من مضاعفات المئة، التي يتعين على سامية إحرازها في كل امتحان لتُقبَل في الجامعة.
- 14 **أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).**

مهارات التفكير العليا



- 15 **تبرير:** أصف منطقة حلّ نظام المتباينات الآتي من دون تمثيلها بيانياً:

$$2x + y \leq 7$$

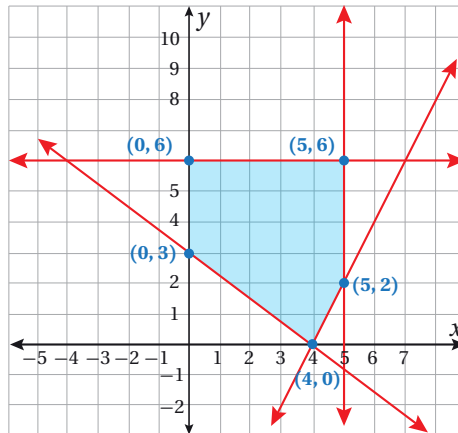
$$2x + y \geq 7$$

- مسألة مفتوحة:** أكتب نظامين يتكوّن كلّ منهما من متباينتين خطيتين مُتغيّرين، بحيث تكون مجموعة الحلّ:

- 16 واقعة في الربع الأوّل من المستوى الإحداثي.

- 17 المجموعة الخالية.

- 18 **تحّد:** أكتب نظام المتباينات الذي منطقة حلّه هي المنطقة المُظلّلة في التمثيل البياني الآتي:



تمثيل نظام متباينات خطية بمتغيرين بيانياً

Graphing System of Linear Inequalities In Two Variables

يُمكنني استعمال برمجية جيو جبرا لتمثيل نظام المتباينات الخطية بيانياً في المستوى الإحداثي، وإيجاد منطقة الحل.

مثال

أمثل نظام المتباينات الخطية الآتي بيانياً باستعمال برمجية جيو جبرا، ثمَّ أُحدّد منطقة الحل:

$$3x + 5y \leq 2$$

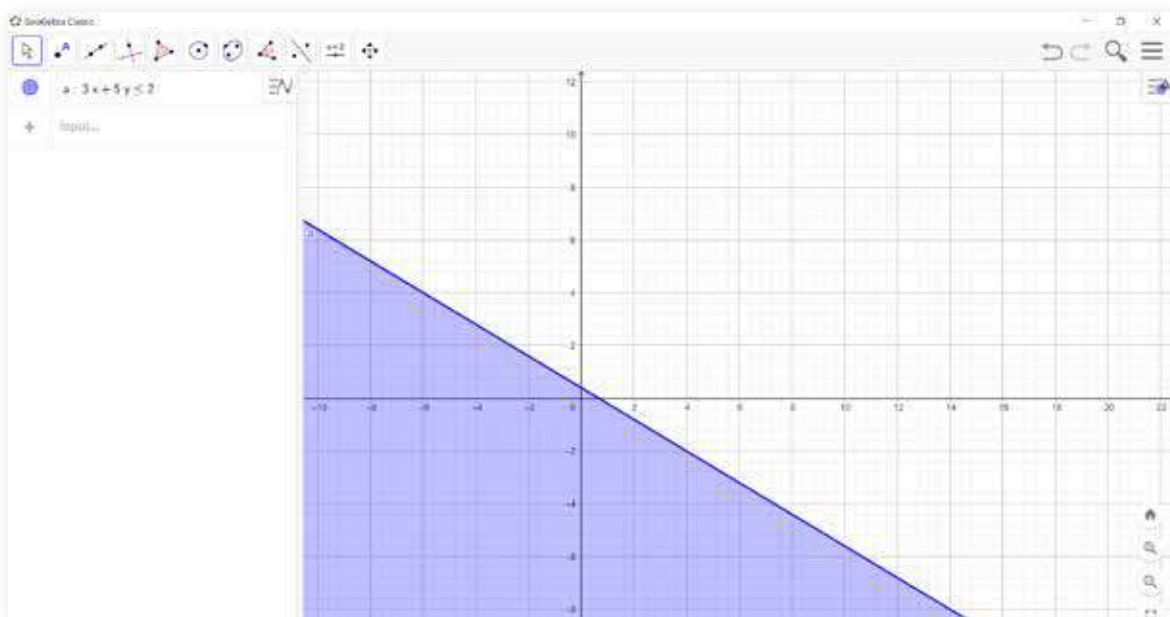
$$x + 5y > 4$$

الخطوة 1: تمثيل المتباينة الأولى بيانياً.

أكتب المتباينة الأولى في شريط الإدخال؛ بنقر المفاتيح الآتية:

3 x + 5 y ≤ 2

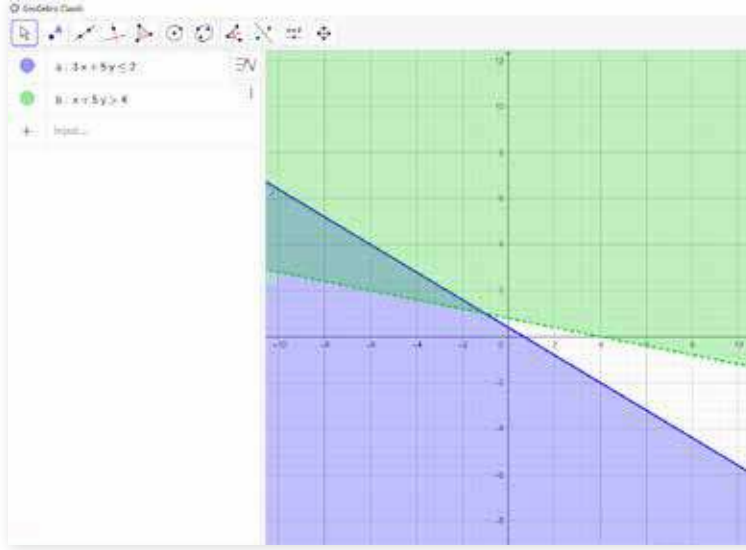
ألاحظ أنَّ برمجية جيو جبرا قد حدّدت منطقة باللون الأزرق. ماذا تعني هذه المنطقة بالنسبة إلى المتباينة؟



الخطوة 2: تمثيل المتباينة الثانية بيانياً.

أكتب المتباينة الثانية في شريط الإدخال؛ بنقر المفاتيح الآتية:

x + 5 y > 4

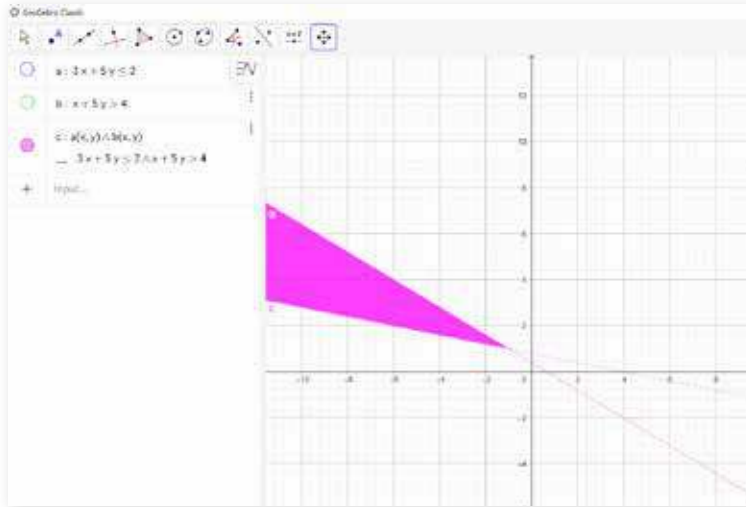


الخطوة 3: تغيير اللون الأزرق الذي حدّدته
برمجية جيو جبرا لمنطقة أخرى؛ لتمييزها من منطقة الحلّ الأولى.

أنقر المتباينة التي يُراد تغيير لون منطقة حلّها على يسار الشاشة، ولتكن المتباينة الثانية، ثمّ أنقر الرمز  الذي بجانبها، وأختار (settings)، ثمّ (color) من القائمة التي ظهرت على يمين الشاشة، ومنها أختار لوناً آخر مثل الأخضر.

الخطوة 4: تفسير المناطق الظاهرة.

ألاحظ وجود 4 مناطق: الأولى باللون الأزرق، والثانية باللون الأخضر، والثالثة مزيج من اللونين معاً، والرابعة باللون الأبيض. ماذا تعني كل منطقة؟



الخطوة 5: إظهار منطقة الحلّ بشكل مُنفصل.
يُمكنني إظهار منطقة الحلّ بشكل مُنفصل عن المناطق الأخرى، وذلك بالضغط على زرّ اللون المجاور لكل متباينة؛ فيختفي عندئذٍ تظليل المناطق، ثمّ كتابة الصيغة الآتية في شريط الإدخال: $a \& b$ ، حيث تُمثّل a و b اسمي المنطقتين المُمثّلتين للمتباينتين؛ فتظهر منطقة الحلّ بشكل مُنفصل كما في الشكل المجاور.

أَتَدْرِبُ



أُمثّل كلاً من أنظمة المتباينات الخطيّة الآتية بيانياً باستعمال برمجية جيو جبرا، ثمّ أ حدّد منطقة الحلّ:

1 $-5x - 2y \geq 3$

$x + y < -3$

3 $x - y \geq 0$

$x + y \leq 0$

2 $0.5x + 7y > -2$

$x < y$

4 $9x - 6y > 8$

$27x - 18y < 1$

البرمجة الخطية Linear Programming

نمذجة مواقف حياتية بمسألة يُمكن حلُّها باستعمال طريقة البرمجة الخطية بيانياً.
القيود، البرمجة الخطية، منطقة الحلول المُمكنة، الاقتران الهدف، الحلُّ الأمثل.

فكرة الدرس

المصطلحات

مسألة اليوم



نوع شتلة البندورة	A	B
الثلث بالدنار	0.2	0.3
أقل إنتاج مُتَوَقَّع	4 kg	5 kg

دخلت سلمى مَحَلًّا لبيع الأشتال، وأرادت شراء نوعين من شتلات البندورة، بما لا يزيد على 4 JD ثمنًا لـ 15 شتلة على الأكثر. وقد أظهرت اللوحة المجاورة المُعلَّقة داخل المَحَلِّ معلومات عن النوعين. كم شتلة ستشتري سلمى من كل نوع لإنتاج أكبر كمٍّ مُمكن من البندورة؟

البرمجة الخطية (linear programming) هي طريقة تعتمد التمثيل البياني في المستوى الإحداثي لإيجاد أكبر قيمة مُمكنة (قيمة عظمى)، أو أصغر قيمة مُمكنة (قيمة صغرى) لاقتران يُسمَّى **الاقتران الهدف** (objective function)، ضمن مجموعة **قيود** (constraints)، يُمثَّل كلٌّ منها متباينة خطية. فبتمثيل المتباينات الخطية (القيود) تتحدَّد منطقة حلٍّ مُشتركة لها تُسمَّى **منطقة الحلول المُمكنة** (feasible region)، وفيها تتحقَّق أكبر قيمة مُمكنة أو أصغر قيمة مُمكنة للاقتران الهدف عند رؤوس المُضلع الذي يُحدِّد منطقة الحلول المُمكنة.

إرشاد

سيقتصر هذا الدرس فقط على البرمجة الخطية بمتغيرين.

تُعرَّف البرمجة الخطية بمتغيرين أيضًا بأنها طريقة البحث عن **الحلُّ الأمثل** (optimal solution)، وتتكوَّن مسألتها مما يأتي:

1 **الاقتران الهدف**: يكون في صورة: $P = ax + by$ ، حيث:

P : اسم الاقتران (مثل الربح).

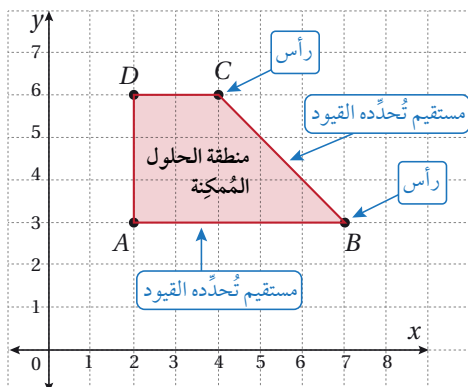
a, b : عدداً حقيقيين. x, y : متغيران.

2 **القيود**: نظام من المتباينات الخطية، وهي

تُكتب بدلالة المتغيرين x, y ، وتُحدَّد

منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل

المجاور.



الحل الأمثل

مفهوم أساسي

إذا وُجدت قيمة عظمى أو قيمة صغرى للاقتران الهدف، فإنّها تكون عند واحد أو أكثر من رؤوس منطقة الحلول المُمكنة.

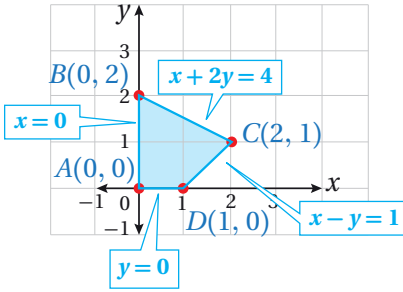
مثال 1

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $P = 3x + 2y$ أكبر ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$\begin{aligned} x - y &\leq 1 \\ x + 2y &\leq 4 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

أذكر

المستقيم $x = 0$ هو المحور y نفسه، والمستقيم $y = 0$ هو المحور x نفسه.



الخطوة 1: أمثل القيود بيانيًا.

أمثل نظام المتباينات الخطية (القيود) بيانيًا، ثمَّ أحدد منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل المجاور.

الخطوة 2: أحدد رؤوس منطقة الحلول المُمكنة.

رؤوس منطقة الحلول المُمكنة	$P = 3x + 2y$
$A(0, 0)$	$P = 3(0) + 2(0) = 0$
$B(0, 2)$	$P = 3(0) + 2(2) = 4$
$C(2, 1)$	$P = 3(2) + 2(1) = 8$
$D(1, 0)$	$P = 3(1) + 2(0) = 3$

القيمة العظمى

أحدد إحداثيي كلّ من نقاط رؤوس منطقة الحلول المُمكنة، وهي: A, B, C, D ، ثمَّ أضعها في جدول، وأحسب فيه قيمة الاقتران الهدف عند كلّ منها.

الخطوة 3: أحدد القيمة العظمى

أو القيمة الصغرى.

ألاحظ أنّ أكبر قيمة للاقتران P هي 8، وأنّها تظهر عندما $x = 2, y = 1$.

أتحقق من فهمي

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل الاقتران: $T = 4x + 5y$ أكبر ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$\begin{aligned} x + 2y &\leq 16 \\ 3x + 2y &\leq 24 \\ x &\geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

يسعى القائلون على الشركات الصناعية والتجارية ومختلف الأعمال إلى تخفيض الكلفة وزيادة الإنتاجية وتحقيق أكبر ربح ممكن، لكن ذلك يخضع لقيود ومحددات، مثل: التمويل، وعدد العمّال، وعدد ساعات العمل، وعوامل العرض والطلب، وغير ذلك من المتغيّرات. لحلّ هذا النوع من المسائل، أستخدم البرمجة الخطية، وذلك باتباع الخطوات الآتية:

- 1 الخطوة صياغة الفرضيات، وكتابة اقتران الهدف الذي يُراد إيجاد قيمته العظمى أو قيمته الصغرى، ثمّ تحديد القيود.
- 2 الخطوة تمثيل نظام المتباينات بيانيًا، ثمّ تظليل منطقة الحلول الممكنة.
- 3 الخطوة تحديد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة، وذلك بإيجاد نقاط تقاطع المستقيمات الحدودية عند تلك الرؤوس.
- 4 الخطوة اختيار القيمة العظمى أو القيمة الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة، وذلك بتعويض إحداثيات الرؤوس في اقتران الهدف.

مثال 2 : من الحياة



يبيع متجر نوعين من أجهزة الحاسوب المحمولة، تكلفة الجهاز الواحد من النوع الأول JD 250، وتكلفة الجهاز الواحد من النوع الثاني JD 400. يُحقّق الجهاز الواحد من النوع الأول ربحًا مقداره JD 45، في حين يُحقّق الجهاز الواحد من النوع الثاني ربحًا مقداره JD 50. قدّر صاحب المتجر أنّ إجمالي الطلب الشهري على الأجهزة لا يتجاوز 250 جهازًا، وبينّ عدم قدرته على استثمار أكثر من JD 70000 في المتجر. كم عدد الأجهزة التي يتعيّن على صاحب المتجر توفيرها للزبائن من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

الخطوة 1: أعبّر عن كلّ من اقتران الهدف والقيود جبريًا.

أفترض أنّ عدد أجهزة الحاسوب التي سيوفّرها صاحب المتجر من النوع الأول هو x ، وأنّ عدد الأجهزة التي سيوفّرها من النوع الثاني هو y . إذا افترضت أنّ صاحب المتجر سيبيع جميع الأجهزة المتوافرة لديه، فإنّ الربح المتوقّع هو: $P = 45x + 50y$.

المطلوب أن يكون الربح أكبر ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$250x + 400y \leq 70000, \quad x + y \leq 250, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

أتذكّر

تُسمّى المتباينتان $x \geq 0, y \geq 0$ قيودًا أو شروط عدم السالبة، وهما توجدان في مسائل البرمجة الخطية الحياتية بصورة ضمنية.

أتعلّم

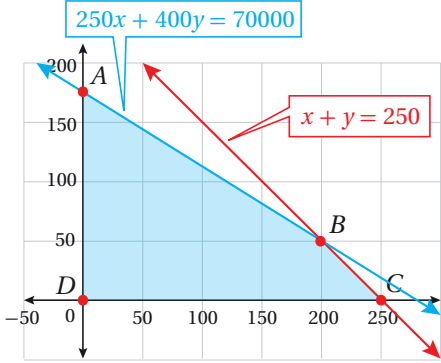
ألاحظ أنّ منطقة الحلول الممكنة مُرتبطة فقط بالمُحدّدات، وليس لاقتران الهدف أيُّ علاقة بها.

أذكّر

يُمكن إيجاد إحداثيي النقطة B بحلّ المعادلتين معاً بطريقة الحذف أو التعويض. كذلك يُمكن استعمال برمجة جيو جبرا لإيجاد إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين، علماً بأنّ النقطة A تمثّل المقطع y للمعادلة الآتية: $250x + 400y = 70000$

الخطوة 2: أمثّل القيود بيانيًا.

أمثّل نظام المتباينات، ثمّ أظلل منطقة الحلول الممكنة كما في الشكل المجاور.



الخطوة 3: أجدد رؤوس منطقة الحلول الممكنة، ثمّ أجدد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

أجدد إحداثيي كلّ من النقاط: A, B, C, D ، ثمّ أجد قيمة الربح P عند كلّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$P = 45x + 50y$
$A(0, 175)$	$P = 45(0) + 50(175) = 8750$
$B(200, 50)$	$P = 45(200) + 50(50) = 11500$
$C(250, 0)$	$P = 45(250) + 50(0) = 11250$
$D(0, 0)$	$P = 45(0) + 50(0) = 0$

القيمة العظمى

ألاحظ من الجدول أنّ أكبر ربح مُمكن هو 11500 JD، وأنّ هذا الربح يتحقّق عند بيع 200 جهاز من النوع الأوّل، و 50 جهازًا من النوع الثاني.

أتحقّق من فهمي

يُنتج مشغل صغير للأثاث المعدني 36 خزانة على الأكثر أسبوعيًا من نوعين مختلفين: A ، و B . يبلغ ربح الخزانة الواحدة من النوع A 35 JD، ومن النوع B 45 JD. إذا كان ما يُباع من النوع A لا يقلّ عن 3 أمثال ما يُباع من النوع B ، فأجد عدد الخزائن التي يُنتجها المشغل من كل نوع لتحقيق أكبر ربح مُمكن.

ألاحظ من المثالين السابقين أنّ منطقة الحلّ الممكنة التي تُحددها القيود كانت محدودة، لكنّ بعض المسائل الحياتية تتضمّن إيجاد أقلّ تكلفة مُمكنة، أو أقلّ كمية مُستهلكة وغير ذلك، فتكون منطقة الحلّ عندئذٍ غير محدودة؛ لأنّ قيودها تفرض ذلك.

مثال 3 : من الحياة

معلومة



يعتمد تسمين الماشية على تغذيتها بخليط مُعدّ بنسب مُحدّدة من الحبوب (مثل: الذرة الصفراء، والشعير)، والتبن، وقشور الفول، وملح الطعام، والفيتامينات.

	النوع 1	النوع 2
تكلفة الكيس الواحد	JD 10	JD 12
عدد وحدات البروتينات	40	30
عدد وحدات المعادن	20	20
عدد وحدات الفيتامينات	10	30

يخلط بعض مُربي الماشية نوعين من العلف للحصول على مزيج ذي تكلفة أقل. ويبيّن الجدول المجاور تكلفة الكيس الواحد من كل نوع، وعدد الوحدات التي يحويها من

البروتينات والمعادن والفيتامينات. إذا احتاجت الماشية يوميًا إلى 150 وحدة من البروتينات، و90 وحدة من المعادن، و60 وحدة من الفيتامينات على الأقل، فكم كيسًا من النوع 1 والنوع 2 معًا يُمكن أن تستهلكه الماشية بأقل تكلفة مُمكنة؟

الخطوة 1: أصوغ الفرضيات.

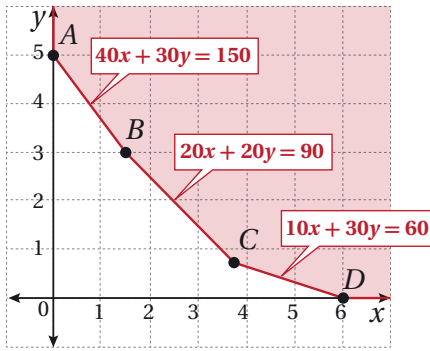
أفترض أن عدد الأكياس من النوع 1 هو x ، وأن عدد الأكياس من النوع 2 هو y .

إذا افترضت أن هذه الماشية تستهلك كل ما يُقدّم لها من النوعين يوميًا، فإن التكلفة C هي:

$$T = 10x + 12y$$

المطلوب أن تكون التكلفة أقل ما يُمكن ضمن القيود الآتية:

$$40x + 30y \geq 150, 20x + 20y \geq 90, 10x + 30y \geq 60, x \geq 0, y \geq 0$$



الخطوة 2: أمثل القيود بيانيًا.

أمثل نظام المتباينات الخطية، ثم أظلل منطقة الحلول المُمكنة كما في الشكل المجاور.

الخطوة 3: أحدد رؤوس منطقة الحلول المُمكنة.

أحدد إحداثيي كلّ من النقاط: A, B, C, D ،

ثم أجد قيمة التكلفة T عند كلّ منها كما في الجدول الآتي:

رؤوس منطقة الحلول المُمكنة	$T = 10x + 12y$
$A(0, 5)$	$T = 10(0) + 12(5) = 60$
$B(1.5, 3)$	$T = 10(1.5) + 12(3) = 51$
$C(3.75, 0.75)$	$T = 10(3.75) + 12(0.75) = 46.5$
$D(6, 0)$	$T = 10(6) + 12(0) = 60$

أتعلّم

من غير المنطقي في المسائل الحياتية، مثل المثال 3، البحث عن أكبر قيمة لاقتران الهدف. ففي هذا المثال، لا يُمكن إيجاد أكبر قيمة مُمكنة لاقتران الهدف؛ لأنّه غير محدود.

الخطوة 4: أحدد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى.

ألاحظ من الجدول أن أقل تكلفة ممكنة هي JD 46.5، وأن الماشية تستهلك وقتئذٍ 3.75 أكياس من العلف 1، و 0.75 كيس من العلف 2، لتوفير الحد الأدنى الذي يلزمها من البروتينات والمعادن والفيتامينات.

أتحقق من فهمي

معلومة



أفادت بعض الدراسات أن جسم الإنسان يحتاج إلى نحو 2000 سعرة حرارية يوميًا، وأن ذلك يختلف من شخص إلى آخر تبعًا لعمر الشخص، وكتلته، ونوع الأنشطة والتمارين التي يمارسها.

حمية غذائية: يشترط نظام للحمية الغذائية توافر ما لا يقل عن 300 سعرة حرارية، و 36 وحدة من فيتامين A، و 90 وحدة من فيتامين C، ضمن الجزء السائل من الوجبة الغذائية.

	النوع 1	النوع 2
سعر العلبة الواحدة	JD 0.25	JD 0.3
عدد السرعات الحرارية	60	60
عدد وحدات فيتامين A	12	6
عدد وحدات فيتامين C	10	30

ويُبين الجدول المجاور تكلفة العلبة الواحدة من نوعين مختلفين من الألبان، وعدد السرعات الحرارية، ووحدات فيتامين A وفيتامين C التي تحويها العلبة الواحدة. كم علبة من كل نوع يمكن أن يستهلكها يوميًا شخص يتبع نظام الحمية الغذائية، ويريد تحقيق شروطها بأقل تكلفة مالية ممكنة؟

إرشاد: أستخدم أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.

أدرب وأحل المسائل



أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أكبر ما يمكن ضمن القيود المعطاة في كل مما يأتي:

1 $P = 4x + 3y$

$$x + 2y \leq 4$$

$$x - y \leq 1$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

2 $R = 10x + 7y$

$$0 \leq x \leq 60$$

$$0 \leq y \leq 60$$

$$5x + 6y \leq 420$$

3 $Z = 1.5x + y$

$$x + 3y \leq 15$$

$$4x + y \leq 16$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

أجد إحداثيي النقطة (x, y) التي تجعل اقتران الهدف أصغر ما يمكن ضمن القيود المعطاة في كل مما يأتي:

4 $Q = 4x + 5y$

$$x + y \geq 8$$

$$3x + 5y \geq 30$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

5 $C = 8x + 4y$

$$x + 2y \geq 4$$

$$3x + y \geq 7$$

$$2y - x \geq 7$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

6 $K = 25x + 35y$

$$8x + 9y \leq 7200$$

$$8x + 9y \geq 3600$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

إرشاد: أستخدم أوراق الرسم البياني الموجودة في نهاية كتاب التمارين.



النوع	أمونيا (وحدة)	نترات (وحدة)	فوسفات (وحدة)
A	3	3	6
B	10	4	4

زراعة: يُباع في محل للوازم الزراعية نوعان من الأسمدة هما A , B ، ويُبين الجدول المجاور مكّونات الكيلوغرام الواحد من هذين السمادين:

يُريد مزارع أن يكون مزيجاً من السمادين يحتوي على 36 وحدة على الأقل فوسفات، و 24 وحدة على الأقل نترات، و 30 وحدة على الأقل أمونيا.

7 إذا كان ثمن الكيلوجرام من النوع A ديناراً واحداً، ومن النوع B 1.5 JD، فأكتب اقتران التكلفة ونظام متباينات يصف هذا الموقف.

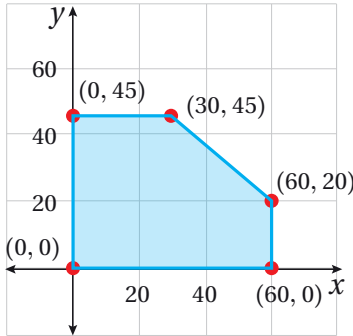
8 أمثل منطقة حلّ نظام المتباينات، وأجد إحداثيات رؤوسها.

9 أجد عدد الكيلوغرامات التي يشتريها من كل نوع؛ ليحقق غايته بأقلّ تكلفة.

10 **دعاية:** أراد صلاح طباعة كُتيّات ونشرات دعائية لتسويق مُنتجات مزرعته من العسل الطبيعي، بحيث يحوي الكُتيّب الواحد 3 صفحات، وتحوي النشرة الواحدة صفحتين. تبلغ تكلفة طباعة الكُتيّب الواحد 0.2 من الدينار، وتكلفة طباعة النشرة الواحدة 0.1 من الدينار. وقد قرّر صلاح أنّه بحاجة إلى طباعة ما لا يزيد على 600 صفحة، مُمثّلةً في 50 كُتيّباً على الأقل، و 150 نشرة على الأقل. كم عدد الكُتيّات والنشرات التي يجب طباعتها بحيث تكون التكلفة أقل ما يُمكن؟

11 أحلّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

مهارات التفكير العليا

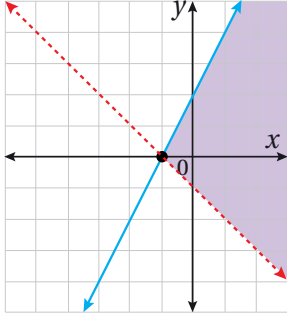


12 **تبرير:** أجد أكبر قيمة مُمكنة لاقتران الهدف: $P = 5x + 6y$ ضمن منطقة الحلول المُمكنة التي يُمثّلها الشكل المجاور، وأبرّر إجابتي، ثم أجد نقاطاً أخرى ضمن منطقة الحلّ يتحقّق عندها أكبر قيمة لاقتران الهدف، وأبرّر إجابتي.

13 **تحدّد:** أجد اقتران هدف صورته: $G = ax + by$ ، حيث a, b عدنان حقيقيان موجبان، وله أكبر قيمة عند النقطة $(2, 3)$ ، وهي 18، ضمن القيود المجاورة:
 $x + 2y \leq 8$
 $x + y \leq 5$
 $x \geq 0, y \geq 0$
 إرشاد: يوجد أكثر من إجابة.

14 **تحدّد:** أجد مجموعة قيم n (حيث n عدد صحيح موجب) التي تجعل لاقتران الهدف:
 $x + 3y \leq 15$
 $4x + y \leq 16$
 $x \geq 0, y \geq 0$
 أكبر قيمة مُمكنة عند النقطة $(3, 4)$ ، ضمن القيود المجاورة:

4 نظام المتباينات الذي له التمثيل البياني الآتي هو:



a) $y \leq 2x + 2$ b) $y \geq 2x + 2$
 $y > -x - 1$ $y < -x - 1$

c) $y < 2x + 2$ d) $y > 2x + 2$
 $y \leq -x - 1$ $y \leq -x - 1$

أحل كل نظام متباينات خطية مما يأتي:

5 $x - 8y \leq 9$
 $4x + 7y > 3$

6 $12x + 10y > 1$
 $-5x - 8y < 2$
 $3x + y \geq -6$

7 أجد جميع الحلول الممكنة لنظام المتباينات الآتي،

حيث m و n عدنان صحيحان موجبان:

$m + n > 4$
 $3m + 7n \leq 21$

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 الزوج الذي يُمثل حلاً لنظام المتباينات الآتي هو:

$y + 5x < 7$
 $2x - y \geq -3$

- a) (3, 2) b) (0, 0)
c) (-4, -2) d) (2, 8)

2 إذا كان لنظام متباينات خطية منطقة حل محدودة،

رؤوسها هي: $P(0, 2), Q(2, 3), R(4, 2), S(3, 0)$

فإن القيمة العظمى لاقتران الهدف: $T = 2x + y$

تتحدد عند الرأس:

- a) P b) Q
c) R d) S

3 نظام المتباينات الذي ليس له حل هو:

- a) $3x + 5y \geq 15$ b) $x + 2y \geq 2$
 $2x + 3y \geq 6$ $2x + 4y \leq 0$
c) $4x + 3y \geq 6$ d) $x + y \geq 6$
 $4x + 3y \leq 10$ $x + y \geq 3$

8 أجد أكبر قيمة للاقتران: $P = 4x + y$ ضمن القيود الآتية:

$$x + y \leq 50$$

$$3x + y \leq 90$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

9 أجد أصغر قيمة للاقتران: $C = 200x + 500y$ ضمن

القيود الآتية:

$$x + 2y \geq 10$$

$$3x + 4y \leq 24$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

تعليم: يعقد مصنع دورة تدريبية لطلبة الهندسة في إحدى الجامعات، بحيث يكون عدد الطالبات المُتدربَات x ، وعدد الطلاب المُتدربين y ، ولا يقلُّ العدد الإجمالي للطالبات والطلاب عن 5، ولا يزيد على 15، ولا يقلُّ عدد الطلاب عن نصف عدد الطالبات:

12 أشرح بالكلمات معنى: $2y \geq x$.

13 إذا كان عدد الطالبات المُتدربَات 6، فما العدد المُمكن للطلاب المُتدربين؟

14 يُنتج مصنع نوعين من القطع المعدنية باستعمال الآلتين A و B معًا. ويُبين الجدول التالي الزمن الذي تستغرقه معالجة القطعة الواحدة في كلٍّ من الآلتين، ومقدار ربح المصنع من بيع القطعة الواحدة من كل نوع. إذا كان عدد ساعات العمل اليومي للآلة A لا يزيد على 10 h، وعدد ساعات العمل اليومي للآلة B لا يزيد على 6 h، فكم قطعة من كل نوع يجب أن يُنتج المصنع يوميًا لتحقيق أكبر ربح مُمكن؟

	القطعة من النوع الأول	القطعة من النوع الثاني
زمن المعالجة في الآلة A	2 h	1 h
زمن المعالجة في الآلة B	1 h	1 h
مقدار الربح	JD 10	JD 15

طُرود خيرية: يريد تاجر مواد تموينية تشغيل عدد من العُمال يوميًا واحدًا لتجهيز طُرود تُباع في شهر رمضان. حدّد التاجر أجره العامل الماهر في هذا اليوم بـ 30 JD، وأجرة العامل المُبتدئ بـ 20 JD، لكنه لا يريد أن يُنفق أكثر من 630 JD على تجهيز الطُرود. استطاع التاجر إيجاد 15 عاملاً ماهراً فقط؛ لذا قرّر أن يُشغّل عاملاً ماهراً واحدًا على الأقل مُقابل كل 3 عُمال مُبتدئين، علمًا بأنَّ العامل الماهر يُجهّز 25 طردًا في الساعة، والعامل المُبتدئ يُجهّز 18 طردًا في الساعة:

10 أكتب نظام متباينات يُمثّل هذه المعلومات، ثمَّ أمثله

11 أجد عدد العُمال المَهرة والعُمال المُبتدئين الذين يجب تشغيلهم لتجهيز أكبر عدد مُمكن من الطُرود.