إجابات أسئلة الدرس الأول

الدرس الأول : مقدمة في المصفوفات

المصفوفة: عناصرها ، ورتبتها.

المصفوفة (matrix) هي ترتيب على هيئة مستطيل لأعداد أو متغيرات في صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين من هذا النوع [ ].

تسمى كل قيمة في المصفوفة عنصرًا (element)، ويُرمز إلى المصفوفة بحرف كبير، مثل: A, B, C,...
ويُرمز إلى عناصرها بحرف صغير، مثل: a, b ...

يُستدل على العنصر في المصفوفة بموقعه الذي يُحدده كل من الصف والعمود الذي يقع فيه العنصر، ويُكتب رقم الصف أولا ثم رقم العمود إلى يمين رمز العنصر من الأسفل، فيُرمز مثلًا إلى العنصر الواقع في الصف 3 والعمود 2 في المصفوفة A بالرمز a_{32}

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 12 & 5 & 29 \\ 17 & 0 & 11 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

4 صفوف

3 أعمدة

العنصر 0 موجود في الصف 3 ، والعمود 2 فيرمز له a_{32}

يمكن وصف المصفوفة برتبتها (order)، فالمصفوفة التي تحوي 4صفوف و3أعمدة يقال إنها مصفوفة من الرتبة 4x3

بوجه عام ، إذا حوت المصفوفة mمن الصفوف ، و nمن الأعمدة فإنها تكون مصفوفة من الرتبة m x n ويساوي عدد عناصرها ناتج ضرب العددين m و n .

فالمصفوفة السابقة:
رتبتها 4x3
وعدد عناصرها 12 عنصر.

أتحقق من فهمي

أستعمل المصفوفة للإجابة عن الأسئلة التالية: $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

1) ما رتبة المصفوفة B ؟

2x4

2) ما قيمة كل من العنصر b_{24} والعنصر b_{13} ؟

$b_{24} = -5$

$b_{13} = 0$

3) أين يقع العنصر الذي قيمته -3 ؟

b_{23}

أنواع خاصة من المصفوفات

- **مصفوفة صف** : وهي المصفوفة التي تتكون من صف واحد فقط وعدد من الأعمدة مثل:

$$A = [2 \quad -4 \quad 3]$$

- **مصفوفة عمود** : وهي المصفوفة التي تتكون من عمود واحد وعدة صفوف مثل:

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة المربعة** : وهي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة مثل:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفة الصفرية** : وهي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفاراً مثل :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **المصفوفتان المتساويتان** : هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها وعناصرها المتناظرة متساوية

مثل : $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

ملاحظة:

هنا المصفوفتان غير متساويتان لاختلاف رتبتيهما

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

هنا المصفوفتان غير متساويتان لعدم تساوي جميع العناصر المتناظرة

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

تنظيم البيانات في المصفوفات وتحليلها

إن تنظيم البيانات في مصفوفة يسهل عملية تفسيرها وتحليلها.
وقد يقدم مجموع البيانات في صف أو عمود معلومة ذات معنى في بعض المسائل

تذكر بأن الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي ناتج جمع القيم مقسوماً على عددها.

أتحقق من فهمي

سياحة: يبين الجدول المجاور نتائج استطلاع آراء عينات من سكان ثلاث قرى متجاورة بخصوص مشروع سياحي يراد إقامته في موقع يتوسط هذه القرى:

	مُؤيِّد	مُعارِض	مُحايِد
القرية A	800	130	70
القرية B	460	250	40
القرية C	1300	700	200

a أرتب هذه البيانات في مصفوفة صفوفها القرى، على أن يكون عدد المؤيدين مرتباً ترتيباً تصاعدياً

$$D=\begin{bmatrix} 460 & 250 & 40 \\ 800 & 130 & 70 \\ 1300 & 700 & 200 \end{bmatrix}$$

b أجد مجموع عناصر الصف الأول، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع

مجموع عناصر الصف الأول 750
ويدل على أن عدد العينات الكلي من القرية B هو 750 عينة .
(أي أنه يمثل عدد العينات من القرية B)

c أجد مجموع عناصر العمود الثاني ، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع

مجموع عناصر العمود الثاني 1080
ويمثل عدد المعارضين في الثلاثة قرى

d هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر العمود الثاني يقدم بيانات ذات معنى؟ أبرر إجابتي

نعم ؛ لأنه يدل على الوسط الحسابي لعدد المعارضين في القرى الثلاث .

أحدّد النوع والرتبة لكل مصفوفة مما يأتي:

1. $D=\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

النوع : مصفوفة مربعة
الرتبة : 3×3

2. $E=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

النوع : مصفوفة صفرية
الرتبة : 2×3

3. $F=\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

النوع : مصفوفة صف
الرتبة : 1×5

4. إذا كانت: $\begin{bmatrix} 3x-2 & 8 \\ 2 & 2x+4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$

فأجد قيمة كل من x, y.

$3x-2=13$
$3x=15$
$x=5$

$2x+4y=18$
$2(5)+4y=18$
$10+4y=18$
$4y=8$
$y=2$

تذكر بأنه يمكن استعمال مفهوم تساوي المصفوفات لايجاد قيم عناصر مجهولة في مصفوفتين متساويتين

أتدرب وأحل المسائل

أحدّد رتبة كل مصفوفة مما يأتي:

1. $H=\begin{bmatrix} 6 & 10 \end{bmatrix}$ — 1×2

2. $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ — 3×3

3. $M=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$ — 4×1

4. $S=\begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix}$ — 1×1

إذا كانت: $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$ فأجد قيمة كل عنصر مما يأتي:

5. a_{31} — 7

6. a_{23} — 9

7. a_{14} — -2

8. أحدد موقع العنصر الذي قيمته 8 في المصفوفة: $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

b_{32}

أحدد النوع والرتبة لكل مصفوفة مما يأتي :

9 $C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

النوع : مصفوفة مربعة
الرتبة : 4×4

10 $A=\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

النوع : مصفوفة عمود
الرتبة : 3×1

11 $E=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

النوع : مصفوفة صف
الرتبة : 1×4

12 $M=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

النوع : مصفوفة مربعة صفرية
الرتبة : 2×2

13 إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & Z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+2y & 4 \\ 3x-11 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فأجد قيمة كل من Z,Y,X.

$Z=2$

$4=3x-11$
$3x=15$
$x=5$

$-1=x+2y$
$-1=5+2y$
$-6=2y$
$y=-3$

14 إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} 9 & X^2 \\ 2-Y & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2x+3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

فأجد قيمة كل من Y,X.

$x^2=2x+3$
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$x=3$ $x=-1$

$2-y=-5$
$y=7$

رياضة: يبين الجدول المجاور إنجازات ثلاثة من لاعبي كرة القدم في مباريات دوري الصفوف في إحدى المدارس:

	الأهداف	التسديدات	المباريات
سمير	7	15	8
أحمد	13	25	11
فوّاز	9	20	14

15 أنظم هذه البيانات في المصفوفة S ، بحيث تحوي صفوفها إنجازات اللاعبين الثلاثة، وترتب فيها الأسماء تنازلياً وفق عدد الأهداف التي أحرزها كل منهم ، ثم أجد قيمة العنصر S_{32}

$$S = \begin{bmatrix} 13 & 25 & 11 \\ 9 & 20 & 14 \\ 7 & 15 & 8 \end{bmatrix}$$

قيمة العنصر S_{32} هي 15

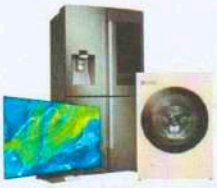
16 أجد مجموع عناصر الصف الثاني، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع

المجموع 43 ولا يوجد له معنى

17 أجد مجموع عناصر العمود الثالث، ثم أبين ما يمثله هذا المجموع

المجموع 33 ويمثل عدد المباريات الإجمالي للاعبين الثلاث

كهربائيات: تتوزع 3 مستودعات لإحدى وكالات تجارة الأجهزة الكهربائية في 3 مدن يوجد في المستودع الأول 200ثلاجة ، و380 غسالة ،و250 شاشة، و300 مروحة، ويوجد في المستودع الثاني 160 ثلاجة ، و540 غسالة، و290 مروحة ويوجد في المستودع الثالث 120 ثلاجةو280 غسالة، و400 شاشة، و470 مروحة:



18 أنظم هذه البيانات في مصفوفة تمثل أعمدتها أنواع الأجهزة الكهربائية، ثم أحدد رتبة المصفوفة الناتجة.

$$A=\begin{bmatrix} 200 & 380 & 250 & 300 \\ 160 & 540 & 0 & 290 \\ 120 & 280 & 400 & 470 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة: 3×4

19 أجمع عناصر كل صف ،ثم أبين ما يمثله المجموع.

* مجموع عناصر الصف الأول : 1130
ويمثل مجموع الأجهزة الإجمالي في مستودع المدينة الأولى .

* مجموع عناصر الصف الثاني: 990
ويمثل مجموع الأجهزة الإجمالي في مستودع المدينة الثانية .

* مجموع عناصر الصف الثالث: 1270
ويمثل مجموع الأجهزة الإجمالي في مستودع المدينة الثالثة .

20 أجمع عناصر كل عمود ،ثم أبين ما يمثله المجموع.

* مجموع عناصر العمود الأول : 480
ويمثل عدد الثلاجات في المستودعات الثلاث .

* مجموع عناصر العمود الثاني : 1200
ويمثل عدد الغسالات في المستودعات الثلاث .

* مجموع عناصر العمود الثالث: 650
ويمثل عدد الشاشات في المستودعات الثلاث .

* مجموع عناصر العمود الرابع : 1060
ويمثل عدد المراوح في المستودعات الثلاث .

21 إذا كانت المسافة بين إربد وعمان 88 km، والمسافة بين عمان والعقبة 324 km، والمسافة بين إربد والعقبة 408 km ، فأنشئ مصفوفة رتبتها 3 × 3 لتمثيل المسافات بين المدن الثلاث.

عمان $\xrightarrow{88}$ إربد

العقبة $\xrightarrow{324}$ عمان

العقبة $\xrightarrow{408}$ إربد

نكون جدول يبين المسافات :

	إربد	عمان	العقبة
إربد	0	88	408
عمان	88	0	324
العقبة	408	324	0

وعليه نستطيع عمل مصفوفة رتبتها 3X3 لتمثيل المسافات بين المدن الثلاث

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 88 & 408 \\ 88 & 0 & 324 \\ 408 & 324 & 0 \end{bmatrix}$$

بحيث تكون المسافة بين المدينة ونفسها صفر ، وكذلك المسافة بين مدينة وأخرى هي نفسها في طريق العودة .

مثلاً :

المسافة من إربد إلى عمان هي نفسها المسافة من عمان إلى إربد وهكذا بقية المسافات .

22 سُئِلت الأسر في مدينتين عن مصدر التدفئة الذي تستعمله في فصل الشتاء، ثم سجلت النتائج في الجدول التالي الذي يبين عدد الأسر التي تستعمل كل مصدر. كيف يمكن عرض بيانات الجدول بصورة أخرى مختصرة؟

	الغاز	الكهرباء	الكاز	أخرى
المدينة A	3256	1678	4589	1253
المدينة B	4560	978	5874	2564

$$A=\begin{bmatrix} 3256 & 1678 & 4589 & 1253 \\ 4560 & 978 & 5874 & 2564 \end{bmatrix}$$

(غاز، كهرباء، كاز، أخرى)

مهارات التفكير العليا

23 تبرير: أبين إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة إطلاقاً، ثم أبرر إجابتي.

إذا كان للمصفوفة A، والمصفوفة B العدد نفسه من العناصر، فإن A = B

"صحيحة أحياناً"

وذلك إذا كان لهما الرتبة نفسها وعناصرهما المتناظرة متساوية.

24 مسألة مفتوحة: أنشئ مصفوفة مربعة من الرتبة 3، وأسميها A، بحيث يكون: $a_{ij} = a_{ji}$، لكل من i , j

المصفوفة بشكل عام:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

وعليه نستطيع عمل مصفوفة مربعة رتبتها 3×3 بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$ كالتالي:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

تذكر :

العدد الأولي هو عدد أكبر من 1 ولا يقبل القسمة إلا على نفسه وعلى العدد 1

25 **تبرير:** إذا كان عدد عناصر المصفوفة B عدداً أولياً ، فماذا يمكن أن تكون رتبتها؟ أبرر إجابتي.

من الممكن أن يكون عدد عناصر المصفوفة

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

وعليه يمكن أن تكون المصفوفة B كالتالي :

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

أي أن رتبتها : 1×3

26 **تحدّ:** أكتب المصفوفة B، حيث:

$b_{ij} = 2i-j$ لكل $i \in \{1,2,3\}$،

ولكل $j \in \{1, 2, 3, 4\}$

نستنتج أن المصفوفة B لها الرتبة : 3×4

وبالتالي :

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}$$

الآن : $\boxed{b_{ij} = 2i-j}$

عناصر الصف الأول .

$b_{11} = 2(1) - 1 = 1$
$b_{12} = 2(1) - 2 = 0$
$b_{13} = 2(1) - 3 = -1$
$b_{14} = 2(1) - 4 = -2$

عناصر الصف الثاني .

$b_{21} = 2(2) - 1 = 3$
$b_{22} = 2(2) - 2 = 2$
$b_{23} = 2(2) - 3 = 1$
$b_{24} = 2(2) - 4 = 0$

عناصر الصف الثالث .

$b_{31} = 2(3) - 1 = 5$
$b_{32} = 2(3) - 2 = 4$
$b_{33} = 2(3) - 3 = 3$
$b_{34} = 2(3) - 4 = 2$

يتبع =>

=A

الآن:
المصفوفة B هي:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

27 تحدّ : أجد قيمة كل من x, y و إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} x+2y & x-y \\ x+y+3z & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

$x+2y=13$ ..... (1)
$x-y=7$ ..... (2)
الآن: سنستخدم التعويض:
$x=7+y$ ..... (2)
$\Rightarrow 7+y+2y=13$ ..... (1)
$7+3y=13$
$3y=6$
$\boxed{y=2}$

وعليه فإن:
$x=7+2$ ..... (2)
$\therefore \boxed{x=9}$

الآن:
$x+y+3z=2$ .... (3)
$9+2+3z=2$
$11+3z=2$
$3z=-9$
$\boxed{z=-3}$

أسئلة كتاب التمارين

أحدد رتبة كل مصفوفة مما يأتي:

1) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$ 2x3

2) $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ 3x1

3) $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 2x2

4) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ 1x3

5) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ 3x3

6) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ 4x3

يبين الجدول المجاور الأسعار (بالقروش) لعدد من المشروبات في أحد المحال التجارية:

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازيٌّ	40	60	75
شاي	30	40	55
قهوة	50	70	90
عصير	65	90	125

7) أرتب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 3x4، ثم أسمي المصفوفة P.

$$P=\begin{bmatrix} 40 & 60 & 75 \\ 30 & 40 & 55 \\ 50 & 70 & 90 \\ 65 & 90 & 125 \end{bmatrix}$$

8) أجد العنصر P_{32}، ثم أبين ما يمثله.

العنصر P_{32} هو 70

ويمثل سعر القهوة للحجم الوسط بالقروش

9) ما رمز العنصر 55 في هذه المصفوفة؟

P_{23}

10 إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} 5 & x+3 \\ 8 & 0 \\ 1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ x+y & 0 \\ 1 & y+4 \end{bmatrix}$$

فأجد قيمة كل من Z,Y,X.

$x + 3 = 4$

$\boxed{x = 1}$

$8 = x + y$

$8 = 1 + y$

$\boxed{y = 7}$

$z = y + 4$

$z = 7 + 4$

$\boxed{z = 11}$

خدمات حكومية: يتوقع إنشاء مدارس ومراكز صحية جديدة عام 2025م وعام 2026م في ثلاث محافظات كما هو مبين في الجدول المجاور:

	المدارس	المراكز الصِّحِّية
المحافظة 1	54	12
المحافظة 2	94	23
المحافظة 3	75	18

11 أرتب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 2×3

$$A = \begin{bmatrix} 54 & 94 & 75 \\ 12 & 23 & 18 \end{bmatrix}$$

12 أجد مجموع عناصر الصف الأول ،ثم أبين ما يمثله هذا المجموع (إن كان له معنى)

مجموع عناصر الصف الأول : 223

ويمثل عدد المدارس الكلي في المحافظات الثلاث .

13 أجد مجموع عناصر العمود الثاني ،ثم أبين ما يمثله هذا المجموع (إن كان له معنى)

مجموع عناصر العمود الثاني : 117

وليس له أي معنى