إجابات أسئلة الدرس الثاني

الدرس الثاني : العمليات على المصفوفات

ضرب المصفوفة في عدد ثابت

عند ضرب المصفوفة في عدد ثابت،فإن ذلك يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة في هذا العدد الثابت

إذا كانت A مصفوفة رتبتها m × n، وكان k عددًا ثابتاً، فإنَّ kA مصفوفة رتبتها m × n، وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر له في المصفوفة A مضروباً في K

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وكان Kعدداً ثابتاً ، فإن :

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

أتحقق من فهمي

إذا كانت :

$$D=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

فأجد كلاً مما يأتي:

1) 3D

$$3D=\begin{bmatrix} 0 & 12 & -9 \\ 21 & -6 & 3 \\ 24 & 30 & 18 \end{bmatrix}$$

2) -2D

$$-2D=\begin{bmatrix} 0 & -8 & 6 \\ -14 & 4 & -2 \\ -16 & -20 & -12 \end{bmatrix}$$

3) 1.5D

$$1.5D=\begin{bmatrix} 0 & 6 & -4.5 \\ 10.5 & -3 & 1.5 \\ 12 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

خصائص العمليات على المصفوفات

إذا كانت A, B, C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها، وكان k,h عددين حقيقيين، فإن:

1 الخاصية التبديلية لجمع المصفوفات

$$A+B=B+A$$

2 الخاصية التجميعية لجمع المصفوفات

$$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$$

3 خاصية توزيع الضرب في ثابت

$$K(A+B)=KA+KB$$

أتحقق من فهمي

إذا كانت :

$$E=\begin{bmatrix}5\\-3\\9\end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix}6\\8\\12\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}3&0&7\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}6&-4&9\end{bmatrix}$$

فأجد كلاً مما يأتي(إن أمكن):

1 $4E-3G$

$$4E=\begin{bmatrix}20\\-12\\36\end{bmatrix}$$

$$3G=\begin{bmatrix}9&0&21\end{bmatrix}$$

الآن :-
نلاحظ بأن المصفوفتان $4E$ و $3G$ برتبتين مختلفتين لذلك يستحيل جمعهما .

2 $2G+6F$

$$2G=\begin{bmatrix}6&0&14\end{bmatrix}$$

$$6F=\begin{bmatrix}36\\48\\72\end{bmatrix}$$

الآن :-
نلاحظ بأن المصفوفتين $2G$ و $6F$

لا يمكن جمعهما لأنهما برتبتين مختلفتين .

3 $5(G+H)$

$$G+H=\begin{bmatrix}9&-4&16\end{bmatrix}$$

$$5G+H=\begin{bmatrix}45&-20&80\end{bmatrix}$$

يمكن استعمال العمليات على المصفوفات لحل مسائل حياتية

زراعة: يملك كل من راشد وحمد مزرعة في الأغوار، ومزرعة أخرى في المفرق.
إذا مثلت المصفوفة A معدل الإنتاج اليومي (بالكيلوغرام) لمزرعتيهما في الأغوار من البندورة والباذنجان والفلفل، مثلت المصفوفة B معدل الإنتاج اليومي لمزرعتيهما في المفرق من الأصناف نفسها، فأجد المصفوفة C التي تمثل معدل الإنتاج الأسبوعي (بالكيلوجرام) لمزرعتي راشد وحمد في الموقعين معاً.

$$A=\begin{matrix}\\ \text{راشد}\\ \text{حمد}\end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix}200 & 500 & 100\\ 260 & 430 & 245\end{bmatrix}\end{matrix}\quad\begin{matrix}\text{فلفل} & \text{باذنجان} & \text{بندورة}\end{matrix}$$

$$B=\begin{matrix}\\ \text{راشد}\\ \text{حمد}\end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix}130 & 100 & 300\\ 240 & 300 & 175\end{bmatrix}\end{matrix}\quad\begin{matrix}\text{فلفل} & \text{باذنجان} & \text{بندورة}\end{matrix}$$

أولاً:
نجد معدل الإنتاج اليومي لمزرعتي راشد وحمد معاً بجمع المصفوفتين A و B فيكون الناتج:

$$A+B=\begin{matrix}\\ \text{راشد}\\ \text{حمد}\end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix}330 & 600 & 400\\ 500 & 730 & 420\end{bmatrix}\end{matrix}\quad\begin{matrix}\text{فلفل} & \text{باذنجان} & \text{بندورة}\end{matrix}$$

ثانياً:
نجد معدل الإنتاج الأسبوعي للمزرعتين معاً بضرب المصفوفة (A+B) في 7.
(عدد أيام الأسبوع سبعة أيام)

$$7(A+B)=\begin{matrix}\\ \text{راشد}\\ \text{حمد}\end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix}2310 & 4200 & 2800\\ 3500 & 5110 & 2940\end{bmatrix}\end{matrix}\quad\begin{matrix}\text{فلفل} & \text{باذنجان} & \text{بندورة}\end{matrix}$$

أتدرب وأحل المسائل

أجد ناتج كل مما يأتي (إن أمكن):

1) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

لا يمكن جمع المصفوفتين لأن مرتبتيهما مختلفة

3) $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 25 & 10 & 13 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31 & 26 & -9 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 & 36 & 4 \\ 7 & 9 & 21 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 32 & -12 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 43 & -7 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 38 & -55 & 15 \end{bmatrix}$

7) $3 \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 27 & -6 \\ 12 & 3 \\ 18 & -9 \end{bmatrix}$

8) $\frac{2}{3} \begin{bmatrix} 15 & -21 \\ 9 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & -14 \\ 6 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

9 $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 12 & -32 \\ 9 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -6 & 16 \\ -\frac{9}{2} & -3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

10 $2\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$$2\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 9 & -15 \end{bmatrix}$$

الآن:

$$2\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 9 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$

11 $-4\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & 10 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} -9 & -5 & -4 \\ -7 & 11 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

الآن:

$$-4\begin{bmatrix} -9 & -5 & -4 \\ -7 & 11 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 36 & 20 & 16 \\ 28 & -44 & -12 \\ 8 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

12 $2\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -3 & 2\\ 6 & 0\end{bmatrix}$

$$2\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & -4\\ 12 & 6\\ 0 & 8\end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 3\\ 0 & -3\\ 12 & -9\end{bmatrix}$$

$$5\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -3 & 2\\ 6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 & -20\\ -15 & 10\\ 30 & 0\end{bmatrix}$$

الآن:

$$2\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-8 & -4\\ 12 & 6\\ 0 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}15 & 3\\ 0 & -3\\ 12 & -9\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 12 & 3\\ 12 & -1\end{bmatrix}$$

<=

الآن:

$$2\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 6 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -3 & 2\\ 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 12 & 3\\ 12 & -1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}-2 & -4\\ -3 & 2\\ 6 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -1\\ 12 & 3\\ 12 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-10 & -20\\ -15 & 10\\ 30 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}17 & 19\\ 27 & -7\\ -18 & -1\end{bmatrix}$$

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 10\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}$$

فأجد كلاً مما يأتي (إن أمكن):

13 **4A+3B**

$$4A=\begin{bmatrix}16 & -8\\ -12 & 40\end{bmatrix}$$

$$3B=\begin{bmatrix}12 & -3 & -15\\ 9 & 6 & 24\end{bmatrix}$$

لا يمكن جمع المصفوفتين لأن رتبتيهما مختلفتين

14 **2C−3A**

$$2C=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 0 & -18\end{bmatrix}$$

$$3A=\begin{bmatrix}12 & -6\\ -9 & 30\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2C-3A=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 0 & -18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12 & -6\\ -9 & 30\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-6 & 10\\ 9 & -48\end{bmatrix}$$

15 $B+1.5B$

$$B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}$$

$$1.5B=\begin{bmatrix}6 & -1.5 & -7.5\\ 4.5 & 3 & 12\end{bmatrix}$$

$$B+1.5B=\begin{bmatrix}4 & -1 & -5\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & -1.5 & -7.5\\ 4.5 & 3 & 12\end{bmatrix}$$

حل آخر:

$$\underbrace{B+1.5B}_{\text{حدود متشابهة}}=2.5B$$

$$\Rightarrow 2.5B=\begin{bmatrix}10 & -2.5 & -12.5\\ 7.5 & 5 & 20\end{bmatrix}$$

16 $3B+2C$

يمكننا ملاحظة أن رتبتي المصفوفة غير متساويتين وبالتالي لا يمكن جمعها

17 $2A-C$

$$2A=\begin{bmatrix}8 & -4\\ -6 & 20\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -9\end{bmatrix}$$

$$2A-C=\begin{bmatrix}5 & -6\\ -6 & 29\end{bmatrix}$$

18 $4A+3C$

$$4A=\begin{bmatrix}16 & -8\\ -12 & 40\end{bmatrix}$$

$$3C=\begin{bmatrix}9 & 6\\ 0 & -27\end{bmatrix}$$

$$4A+3C=\begin{bmatrix}25 & -2\\ -12 & 13\end{bmatrix}$$

19 رياضة: لدى محل تجهيزات رياضية فرع في مدينة الكرك، وفرع آخر في مدينة الطفيلة. إذا مثلت المصفوفة A عدد البدلات الرياضية التي باعها الفرعان معاً من جميع المقاسات (الصغيرة، والمتوسطة، والكبيرة) في شهر نيسان عام 2024م، ومثلت المصفوفة B عدد البدلات التي باعها الفرعان معاً من المقاسات الثلاثة في شهر نيسان عام 2023م، فأجد المصفوفة التي تمثل ما باعه كلا الفرعين في الشهرين معاً.

$$A=\begin{array}{c} \\ \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{كبير} & \text{وسط} & \text{صغير}\end{array}\\ \begin{bmatrix}10 & 15 & 20\\ 17 & 30 & 12\end{bmatrix}\end{array}$$

$$B=\begin{array}{c} \\ \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{كبير} & \text{وسط} & \text{صغير}\end{array}\\ \begin{bmatrix}23 & 42 & 18\\ 21 & 25 & 20\end{bmatrix}\end{array}$$

A+B تمثل مصفوفة ما باعه كلا الفرعين في الشهرين معاً.

$$A+B=\begin{array}{c} \\ \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{كبير} & \text{وسط} & \text{صغير}\end{array}\\ \begin{bmatrix}33 & 57 & 38\\ 38 & 55 & 32\end{bmatrix}\end{array}$$

20 مدارس: يبين الجدول المجاور محتويات مختبري الحاسوب في إحدى المدارس عام 2024 م. تخطط إدارة المدرسة لزيادة هذه المحتويات بما نسبته 10%. أكتب مصفوفة تمثل ما يجب شراؤه للمختبرين، ومصفوفة أخرى تمثل محتويات المختبرين بعد عملية الشراء.

	أجهزة حاسوب	طاولات	مقاعد
المختبر A	12	20	30
المختبر B	20	28	40

أولاً:

نكتب مصفوفة تمثل محتويات المختبرين الأصلية:

$$C=\begin{matrix}\\ \text{المختبر A}\\ \text{المختبر B}\end{matrix}\begin{matrix}\overset{\text{أجهزة حاسوب}}{12} & \overset{\text{طاولات}}{20} & \overset{\text{مقاعد}}{30}\\ 20 & 28 & 40\end{matrix}$$

ثانياً:

نكتب مصفوفة ما يجب شراؤه للمختبرين وهي $0.10C$ ∴ $(10\% = 0.10)$

$$0.10C = 0.1C = \begin{matrix}\\ \text{مختبر A}\\ \text{مختبر B}\end{matrix}\begin{matrix}\overset{\text{أجهزة حاسوب}}{1.2} & \overset{\text{طاولات}}{2} & \overset{\text{مقاعد}}{3}\\ 2 & 2.8 & 4\end{matrix}$$

ثالثاً:

نجمع المصفوفتين السابقتين $(C + 0.1C)$ لنكتب مصفوفة تمثل محتويات المختبرين بعد عملية الشراء.

$$C+0.1C = \begin{matrix}\\ \text{مختبر A}\\ \text{مختبر B}\end{matrix}\begin{matrix}\overset{\text{أجهزة حاسوب}}{13.2} & \overset{\text{طاولات}}{22} & \overset{\text{مقاعد}}{33}\\ 22 & 30.8 & 44\end{matrix}$$

لكن نلاحظ وجود كسور في المصفوفة وهذا لا يجوز لأننا نتحدث عن عدد أجهزة حاسوب وعدد طاولات فلا يجوز أن نقول مثلاً 13.2 جهاز حاسوب لذلك نقرب القيم التي تحتوي على كسور إلى أقرب عدد صحيح فتصبح المصفوفة S التالي:

$$C+0.1C \approx \begin{bmatrix}13 & 22 & 33\\ 22 & 31 & 44\end{bmatrix}$$

21 أجد قيمة كل من x، وy، وz التي تحقق المعادلة الآتية:

$$2\begin{bmatrix} X & 3 \\ 6 & Y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} X & 6 \\ Z & -2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} Z & 3 \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

أولاً:

نكتب المعادلة بالصيغة التالية:

$$\begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 12 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 18 \\ 3z & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4z & 12 \\ 0 & 4x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 12 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x-4z & 6 \\ 3z & -6-4x \end{bmatrix}$$

ثانياً:

نستطيع الآن إيجاد قيم المتغيرات كما تعلمنا سابقاً:

$$\frac{12}{3} = \frac{3z}{3} \Rightarrow \boxed{z = 4}$$

$$2x = 3x - 4z$$
$$2x - 3x = -4z$$
$$-x = -4z$$
$$-x = -4(4)$$
$$-x = -16$$
$$\boxed{x = 16}$$

$$2y = -6 - 4x$$
$$2y = -6 - 4(16)$$
$$2y = -6 - 64$$
$$2y = -70$$
$$\boxed{y = -35}$$

22 أجد قيمة كل من x، وy التي تحقق المعادلة الآتية:

$$X\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\end{bmatrix}+Y\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & (3-Y) & -7\end{bmatrix}$$

$$x\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & x & 3x\end{bmatrix}$$

$$y\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 5y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & x & 3x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 5y\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & x & (3x+5y)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & x & (3x+5y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & (3-y) & -7\end{bmatrix}$$

الآن:

$$x=3-y \quad \text{-----(1)}$$

$$3x+5y=-7 \quad \text{----(2)}$$

باستخدام التعويض ينتج أن:

$$3(3-y)+5y=-7 \quad \text{----(2)}$$

(تعويض المعادلة (1) في المعادلة (2))

$$\Leftarrow$$

$$9-3y+5y=-7$$

$$9+2y=-7$$

$$2y=-7-9=-16$$

$$\frac{2y}{2}=\frac{-16}{2}$$

$$\boxed{y=-8}$$

الآن نعوض قيمة y في أي من المعادلتين ولتكن المعادلة (1) لإيجاد قيمة x

$$x=3-y \quad \text{----(1)}$$

$$x=3-(-8)$$

$$\boxed{x=11}$$

23 تمثل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$

أسعار البيع (بالدينار) لثلاثة مشروبات(شاي، قهوة، عصير) بأكواب صغيرة وأخرى كبيرة في أحد الأكشاك. وقد قرر صاحب الكشك رفع الأسعار بما نسبته 20%،نظراً إلى زيادة التكاليف. ما المصفوفة التي تمثل الأسعار الجديدة؟

أولاً :
نكتب مصفوفة الأسعار الأصلية

$$A = \begin{matrix} \\ \text{شاي} \\ \text{قهوة} \\ \text{عصير} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{صغير} & \text{كبير} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ثانياً :
نكتب مصفوفة تمثل مقدار الزيادة بالسعر وذلك بضرب المصفوفة A في 0.2 حيث أن :

$$20\% = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$0.2A = \begin{matrix} \\ \text{شاي} \\ \text{قهوة} \\ \text{عصير} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{صغير} & \text{كبير} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.08 & 0.15 \\ 0.12 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ثالثاً :
نكتب مصفوفة تمثل الأسعار الجديدة بجمع مصفوفة الأسعار الأصلية مع مصفوفة مقدار الزيادة .

⇐ مصفوفة الأسعار الجديدة

$$A + 0.2A = 1.2A \Rightarrow$$

$$1.2A = \begin{matrix} \\ \text{شاي} \\ \text{قهوة} \\ \text{عصير} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{صغير} & \text{كبير} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.48 & 0.9 \\ 0.72 & 1.2 \\ 1.8 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

مهارات التفكير العليا

24 تبرير: أحدد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائماً، أو صحيحة أحياناً، أو غير صحيحة إطلاقاً، ثم أبرر إجابتي.

إذا كان عدد عناصر المصفوفة A مساوياً لعدد عناصر المصفوفة B ، فإنه يمكن إيجاد A + B

صحيحة أحياناً وذلك إذا كانت رتبة A مساوية لرتبة B ولكن ليس بالضرورة ذلك حيث :

مثلاً :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

مثلاً :

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفتان نفس عدد العناصر إلا أن رتب المصفوفتين غير متساويتين مما يجعل عملية جمع المصفوفتين غير ممكنة ، بينما لو كانت :

مثلاً :

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

مثلاً :

$$B=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$$

فهنا يمكن إيجاد A+B لأن رتبتي المصفوفتين متساويتين .

25 أكتشف الخطأ: ما الخطأ في الحل الآتي:

$$\begin{bmatrix}2 & 8\\ 4 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 11 & 0\\ 8 & 8 & 9\end{bmatrix}$$ ✗

الخطأ : هو أن الرتبتين للمصفوفتين مختلفتين لذلك لا يمكن إجراء عملية الجمع وهنا قام بجمع المصفوفتين وهذا هو الخطأ الذي قام به .

26 مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A, B ، بحيث يكون: $3A+2B=\begin{bmatrix}12 & 8 & 10\\ 6 & -5 & 11\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}\frac{9}{2} & 1 & 5\\ 3 & -1 & \frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

27 تحدّ: أجد المصفوفتين X, Y اللتين تحققان المعادلتين الآتيتين:

$$X-2Y=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 9\end{bmatrix},\quad 3X+4Y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix}$$

$$x-2y=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 9\end{bmatrix} \quad \text{-----(1)}$$

$$3x+4y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix} \quad \text{-----(2)}$$

الآن:
سنتعامل معهم على أنهم معادلتين بمجهولين وسنستخدم طريقة الحذف لحلهم:

⇐ نضرب المعادلة (1) في العدد (2) فينتج أن:

$$2x-4y=\begin{bmatrix}2 & 10\\ -4 & 18\end{bmatrix} \quad \text{-----(1)}$$

$$3x+4y=\begin{bmatrix}8 & 5\\ -31 & 12\end{bmatrix} \quad \text{-----(2)}$$

⇐ بجمع المعادلة (1) مع المعادلة (2) فينتج:

$$5x=\begin{bmatrix}10 & 15\\ -35 & 30\end{bmatrix}$$

⇐ نقسم طرفي المعادلة على 5 فنجد بذلك المصفوفة x كالتالي:

⇐

$$\frac{5x}{5}=\begin{bmatrix}\frac{10}{5} & \frac{15}{5}\\ \frac{-35}{5} & \frac{30}{5}\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ x=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -7 & 6\end{bmatrix}$$

الآن:
نعوض المصفوفة x في أي من المعادلتين لإيجاد المصفوفة y ولتكن المعادلة (1)

$$x-2y=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 9\end{bmatrix} \quad \text{-----(1)}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ -7 & 6\end{bmatrix}-2y=\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ -7 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 5\\ -2 & 9\end{bmatrix}=2y$$

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -5 & -3\end{bmatrix}=2y$$

الآن نقسمة طرفي المعادلة على 2 تنتج المصفوفة y

$$\frac{2y}{2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-2}{2}\\ \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ y=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -1\\ \frac{-5}{2} & \frac{-3}{2}\end{bmatrix}$$

أسئلة كتاب التمارين

إذا كان:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 5 & 7\\ 3 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}9 & 5\\ -3 & 1\\ 8 & 6\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 8\\ 1 & 5 & 4\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-9 & 30 & 36\\ 12 & 15 & -24\end{bmatrix}$$

فأجد كلاً مما يأتي (إن أمكن):

1 $A+B$

$$=\begin{bmatrix}11 & 3\\ 2 & 8\\ 11 & 12\end{bmatrix}$$

2 $B+C$

لا يمكن الجمع؛ لأن رتبة B لا تساوي رتبة C

3 $C-D$

$$=\begin{bmatrix}5 & -30 & -28\\ -11 & -10 & 28\end{bmatrix}$$

4 $B-A$

$$=\begin{bmatrix}7 & 7\\ -8 & -6\\ 5 & 0\end{bmatrix}$$

5 $4A$

$$=\begin{bmatrix}8 & -8\\ 20 & 28\\ 12 & 24\end{bmatrix}$$

6 $3A-2B$

$$3A=\begin{bmatrix}6 & -6\\ 15 & 21\\ 9 & 18\end{bmatrix} \quad 2B=\begin{bmatrix}18 & 10\\ -6 & 2\\ 16 & 12\end{bmatrix}$$

$$3A-2B=\begin{bmatrix}6 & -6\\ 15 & 21\\ 9 & 18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}18 & 10\\ -6 & 2\\ 16 & 12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-12 & -16\\ 21 & 19\\ -7 & 6\end{bmatrix}$$

7 $D+2C$

$$D=\begin{bmatrix}-9 & 30 & 36\\ 12 & 15 & -24\end{bmatrix}$$

$$2C=\begin{bmatrix}-8 & 0 & 16\\ 2 & 10 & 8\end{bmatrix}$$

$$D+2C=\begin{bmatrix}-17 & 30 & 52\\ 14 & 25 & -16\end{bmatrix}$$

8 $-\frac{2}{3}D$

$$=\begin{bmatrix}6 & -20 & -24\\ -8 & -10 & 16\end{bmatrix}$$

9 أكتب المصفوفة: $A=\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$ في صورة

$A=KM$ حيث K عدد ثابت،
و M مصفوفة عناصرها أعداد صحيحة.

أولاً: يجب إيجاد K كالتالي:

* نجد المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لمقامات عناصر المصفوفة K كالتالي:

$3=3*1$
$2=2*1$
$4=2*2*1$
$6=2*3*1$

$LCM=3*2*2*1=12$

الآن:
إذا ضربنا المصفوفة A بالعدد 12 سنحصل على مصفوفة بأعداد صحيحة كالتالي:

$$12A=12\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 & -6 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

وعليه نستطيع القول بأن:

$$M=12A=\begin{bmatrix} 20 & -6 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

<=

$$A=\frac{1}{12}M$$

$$\therefore A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 20 & -6 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

حيث:

$$K=\frac{1}{12}$$

$$M=\begin{bmatrix} 20 & -6 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$$

تذكر:
الأعداد الصحيحة هي الأعداد التي لا تحتوي على كسور وهي من $-\infty$ إلى ∞.

10 إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 11 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 3b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فأجد قيمة كلّ من d,c,b,a.

$$\begin{bmatrix} 3+b & a+11 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 3+b=9 \Rightarrow \boxed{b=6}$

$a+11=3b$

$a+11=3(6)$

$a+11=18$

$\boxed{a=7}$

$\boxed{c=-6}$

$\boxed{d=4}$

11 إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

فأجد قيمة كلّ من y,x.

$$\begin{bmatrix} x-y & y-x \\ -y-x & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$x-y=4 \quad \cdots\cdots (1)$

$-y-x=-6 \quad \cdots\cdots (2)$

$x-y=4 \quad \cdots\cdots (1)$

$-x-y=-6 \quad \cdots\cdots (2)$

بالجمع

$\frac{-2y}{-2} = \frac{-2}{-2}$

$\boxed{y=1}$

$x-y=4 \quad \cdots\cdots (1)$

$x-1=4$

$\boxed{x=5}$

12 إذا كانت:

$$3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix}3 & 5\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

فأجد المصفوفة B .

$$3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & -3\\ 12 & 15\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}6 & -3\\ 12 & 15\end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix}3 & 5\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$2B = \begin{bmatrix}6 & -3\\ 12 & 15\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3 & 5\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\frac{2B}{2} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & \frac{-8}{2}\\ \frac{14}{2} & \frac{14}{2}\end{bmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -4\\ 7 & 7\end{bmatrix}$$

13 أجد قيمة كلّ من y,x التي تحقق المعادلة الآتية:

$$x\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0 & 0 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & (3-y) & -7\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & x & 3x\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 5y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & (3-y) & -7\end{bmatrix}$$

$$x = 3-y \quad ----(1)$$

$$3x+5y = -7 \quad ----(2)$$

الآن:

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) كالتالي:

$$3(3-y)+5y = -7 \quad ----(2)$$

$$9-3y+5y = -7 \quad ----(2)$$

$$2y = -7-9$$

$$\frac{2y}{2} = \frac{-16}{2}$$

$$\boxed{y = -8}$$

الآن:

$$x = 3-y \quad ----(1)$$

$$x = 3-(-8)$$

$$x = 3+8$$

$$\boxed{x = 11}$$

14 صناعة: يبين الجدول (1) عدد ما أنتجته 3 مصانع لإحدى الشركات من 3 طرازات لأجهزة التكييف المنزلي في النصف الأول من عام 2020م، ويبين الجدول (2) عدد أجهزة التكييف المنزلي المنتجة في النصف الثاني من العام نفسه في هذه المصانع. أكتب مصفوفة تمثل عدد ما أنتجه كل واحد من هذه المصانع الثلاثة من طرازات أجهزة التكييف المنزلي عام 2020م.

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	700	1300	670
المصنع 2	650	1000	890
المصنع 3	480	900	540

جدول (1)

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	850	1200	670
المصنع 2	540	860	530
المصنع 3	620	750	490

جدول (2)

أولاً:
نكتب مصفوفة إنجاز النصف الأول من عام 2020م.

$$\begin{matrix} \text{طراز A} & \text{طراز B} & \text{طراز C} \\ \begin{bmatrix} 700 & 1300 & 670 \\ 650 & 1000 & 890 \\ 480 & 900 & 540 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{مصنع (1)} \\ \text{مصنع (2)} \\ \text{مصنع (3)} \end{matrix} \end{matrix}$$

ثانياً:
نكتب مصفوفة انجاز النصف الثاني من عام 2020م

$$\begin{matrix} \text{طراز A} & \text{طراز B} & \text{طراز C} \\ \begin{bmatrix} 850 & 1200 & 670 \\ 540 & 860 & 530 \\ 620 & 750 & 490 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{مصنع (1)} \\ \text{مصنع (2)} \\ \text{مصنع (3)} \end{matrix} \end{matrix}$$

ثالثاً:
نكتب مصفوفة إنجاز العام 2020م كاملاً بجمع المصفوفتين السابقتين:

$$\begin{matrix} \text{طراز A} & \text{طراز B} & \text{طراز C} \\ \begin{bmatrix} 1550 & 2500 & 1340 \\ 1190 & 1860 & 1420 \\ 1100 & 1650 & 1030 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{مصنع (1)} \\ \text{مصنع (2)} \\ \text{مصنع (3)} \end{matrix} \end{matrix}$$