# إجابات أسئلة الدرس الثالث

# الدرس الثالث : ضرب المصفوفات

## ضرب المصفوفات

تختلف عملية ضرب مصفوفتين عن عمليتي جمعهما وطرحهما؛ إذ لا تضرب العناصر المتناظرة في بعضها كما في عمليتي جمع المصفوفات وطرحها، وإنما تضرب عناصر صفوف المصفوفة الأولى في العناصر المناظرة لها في أعمدة المصفوفة الثانية، ثم تجمع النواتج.

العنصر الواقع في الصف j والعمود k في المصفوفة A X B يساوي مجموع نواتج ضرب عناصر الصف j من المصفوفة A في العناصر المناظرة لها في العمود k من المصفوفة B

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix}$$

فإن:

$$C=AB=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

حيث:

$$c_{ij}=a_{i1}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}+b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

## شروط ضرب المصفوفات

يمكن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية.

وعند ضرب المصفوفة A التي رتبتها M X N في المصفوفة B التي رتبتها N X r ، فإن رتبة المصفوفة الناتجة A X B هي : M X r

A X B = AB
M X N  N X r  M X r

مُتساويان
رتبة AB

## خصائص ضرب المصفوفات

تعد الخصائص الآتية صحيحة لأي ثلاث مصفوفات: R, S, T، وأي عدد حقيقي c، شرط أن تكون عمليتا الجمع والضرب معرفتين في جميع الحالات الآتية:

1. خاصية التجميع لضرب المصفوفات.
$$(RS)T=R(ST)$$
2. خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد حقيقي.
$$C(RS)=(CR)S=R(CT)$$
3. خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليسار.
$$R(S+T)=RS+RT$$
4. خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليمين.
$$(R+S)T=RT+ST$$

## أتحقق من فهمي

إذا كانت $A_{2X2}$، وكانت $B_{3X2}$، وكانت $C_{2X3}$، فأُبين إذا كانت عملية الضرب في كل ممّا يأتي ممكنة أم لا. وإن كانت كذلك، أُحدّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

**1** **AB**

$A_{2x2}$

$B_{3x2}$

بما أن عدد الأعمدة في المصفوفة A لا يساوي عدد الصفوف في المصفوفة B فإنه لا يمكن إيجاد A xB .

**2** **BC**

$B_{3x2}$

$C_{2x3}$

بما أن عدد الأعمدة في المصفوفة B يساوي عدد الصفوف في المصفوفة C فإنه يمكن إيجاد B xC

$$B_{3x2} \times C_{2x3} = BxC_{3x3}$$

متساويين — رتبة BxC

**3** **CA**

$C_{2x3}$

$A_{2x2}$

بما أن عدد الأعمدة في المصفوفة C لا يساوي عدد الصفوف في المصفوفة A فإنه لا يمكن إيجاد C xA .

## أتحقق من فهمي

**1** إذا كانت:

$M=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ وكانت: $N=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 6 & -3\end{bmatrix}$

فأجد : MN

$$MN=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 6 & -3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12+0 & -4+0\\ 18-6 & -6-15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & -4\\ 12 & -21\end{bmatrix}$$

**2** إذا كانت:

$C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ وكانت: $D=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$

فأجد : CD

$$CD=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}_{3x2}\times\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}_{2x3}$$

$$=\begin{bmatrix}2+0 & 1+0 & 3+0\\ 4+1 & 2-1 & 6+0\\ 6+2 & 3-2 & 9+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 1 & 6\\ 8 & 1 & 9\end{bmatrix}_{3x3}$$

## أتحقق من فهمي

**كرة قدم:** يُبين الجدول المجاور نتائج 3 فِرَق لكرة القدم بعدما لعب كلّ منها 4 مباريات. إذا علمْتُ أنَّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقاط لكل فوز، وأن تعادله يعني حصوله على نقطة واحدة، ، وأنّ خسارته تعني عدم حصوله على أي نقاط، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

| الفريق | ربح | تعادل | خسارة |
|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 0 | 3 |
| $B$ | 3 | 1 | 0 |
| $C$ | 1 | 1 | 2 |

أولاً:
نكتب مصفوفة النتائج كالتالي:

$$A=\begin{matrix}\text{ربح} & \text{تعادل} & \text{خسارة}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} & & \end{matrix}\begin{matrix}\\ \text{فريق } A\\ \text{فريق } B\\ \text{فريق } C\end{matrix}$$

ثانياً:
نكتب مصفوفة النقاط كالتالي:

$$B=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}_{3\times1}\begin{matrix}\text{فوز}\\ \text{تعادل}\\ \text{خسارة}\end{matrix}$$

ثالثاً:
نضرب مصفوفة النتائج في مصفوفة النقاط فتنتج مصفوفة النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}_{3\times3}\times\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$=\begin{bmatrix}3+0+0\\ 9+1+0\\ 3+1+0\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$=\begin{bmatrix}3\\ 10\\ 4\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{فريق } A\\ \text{فريق } B\\ \text{فريق } C\end{matrix}$$

∴ الفائز هو فريق $B$ حيث حصل على أعلى نقاط.

أتحقق من فهمي

إذا كانت:

$$C=\begin{bmatrix}6&-1&2\\2&4&0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}4&3\\0&2\\2&5\end{bmatrix}$$

فأجد كلاً مما يأتي:

1 $CD=\begin{bmatrix}6&-1&2\\2&4&0\end{bmatrix}_{2\times3}\times\begin{bmatrix}4&3\\0&2\\2&5\end{bmatrix}_{3\times2}$

$$=\begin{bmatrix}24+0+4&18-2+10\\8+0+0&6+8+0\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}28&26\\8&14\end{bmatrix}_{2\times2}$$

2 $DC=\begin{bmatrix}4&3\\0&2\\2&5\end{bmatrix}_{3\times2}\times\begin{bmatrix}6&-1&2\\2&4&0\end{bmatrix}_{2\times3}$

$$=\begin{bmatrix}24+6&-4+12&8+0\\0+4&0+8&0+0\\12+10&-2+20&4+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}30&8&8\\4&8&0\\22&18&4\end{bmatrix}_{3\times3}$$

إذا كانت:

$$E=\begin{bmatrix}5&-2\\2&3\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}21&-16\\16&5\end{bmatrix}$$

فأجد كلاً مما يأتي:

1 $EF=\begin{bmatrix}5&-2\\2&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}21&-16\\16&5\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}105-32&-80-10\\42+48&-32+15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}73&-90\\90&-17\end{bmatrix}$$

2 $FE=\begin{bmatrix}21&-16\\16&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5&-2\\2&3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}105-32&-42-48\\80+10&-32+15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}73&-90\\90&-17\end{bmatrix}$$

أتحقق من فهمي

إذا كانت:

$$F=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

وكانت: $M=-4$ فأجد كلاً مما يأتي :

1 $(F+G)H=\left(\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & 8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24 & 18\\ 60 & 36\end{bmatrix}$$

2 $(FG)H=$

$$\left(\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 5 & 18\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-22 & -14\\ 107 & 61\end{bmatrix}$$

3 $G(MH)=$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\times\left(-4\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-28 & -20\\ -16 & -8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-16 & -8\\ -76 & -44\end{bmatrix}$$

## أتدرب وأحل المسائل

إذا كانت:

$$C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0.5 & 3 & 0\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}2 & -1.5 & -1\\ 1.5 & -1 & 1\\ 0.5 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

فأبين إذا كانت عملية الضرب في كل مما يأتي ممكنة أم لا. وإن كانت كذلك ،أحدد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

قبل البدء بحل الأسئلة من (1) إلى (8) نحدد رتبة كل مصفوفة :

$A_{2x2}$ ، $B_{3x2}$ ، $C_{2x3}$ ، $D_{3x3}$

### 1 AB

$A_{2x2}$

$B_{3x2}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا تساوي عدد صفوف المصفوفة B

فإنه لا يمكن إيجاد AxB

### 2 BC

$B_{3x2} \times C_{2x3}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة B تساوي عدد صفوف المصفوفة C

فإنه يمكن إيجاد BxC

وتكون المصفوفة الناتجة من الرتبة 3x3

### 3 DC

$D_{3x3}$

$C_{2x3}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة D لا يساوي عدد صفوف المصفوفة C

فإنه لا يمكن إيجاد DxC

**4** **BA**

$B_{3\times2} \times A_{2\times2}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة A فإنه يمكن إيجاد BxA وعليه ستكون رتبة المصفوفة الناتجة 3x2

**5** **CD**

$C_{2\times3} \times D_{3\times3}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة C تساوي عدد صفوف المصفوفة D فإنه يمكن إيجاد CxD وعليه ستكون رتبة المصفوفة الناتجة 2x3

**6** **BB**

$B_{3\times2}$

$B_{3\times2}$

بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا تساوي عدد صفوف المصفوفة B فإنه لا يمكن إيجاد BxB

**7** **CB+A**

$C_{2\times3} \times B_{3\times2}$

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة C تساوي عدد صفوف المصفوفة B وبالتالي فإنه يمكن إيجاد CxB وتكون المصفوفة الناتجة من حاصل الضرب من الرتبة 2x2

$CxB_{2\times2} + A_{2\times2}$

نلاحظ بأن المصفوفتين CxB و A لهما نفس الرتبة وبالتالي يمكننا إيجاد عملية الجمع وعليه ستكون رتبة المصفوفة الناتجة 2x2

أجد ناتج كل مما يأتي (إن أمكن):

8 BCD

$$B_{3\times2} \times C_{2\times3} = BC_{3\times3}$$

نلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة C وبالتالي يمكن إيجاد المصفوفة BxC ذات الرتبة $3\times3$

$$BC_{3\times3} \times D_{3\times3}$$ <=

ونلاحظ أن عدد اعمدة المصفوفة BC يساوي عدد صفوف المصفوفة D وعليه يمكن إيجاد B.C.D وستكون المصفوفة الناتجة من الرتبة $3\times3$ .

9 إذا كان AB = C، وكانت رتبة المصفوفة A هي : 3 × 4، ورتبة المصفوفة C هي: 5 × 4، فما رتبة المصفوفة B؟

$$A_{4\times3} \quad , \quad C_{4\times5}$$

$$A_{4\times3} \times B = C_{4\times5}$$

$$\therefore \boxed{B_{3\times5}}$$

10 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times2}$

=> لا يمكن إيجاد عملية الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى لا تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية .

11 $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{1\times3}$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 15 & 9 \\ -8 & -20 & -12 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

12 $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3} \times \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

$= \begin{bmatrix} 0+2+8 & 9-1+14 & 6-5+4 \\ 0-4+0 & 12+2+0 & 8+10+0 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$= \begin{bmatrix} 10 & 22 & 5 \\ -4 & 14 & 18 \end{bmatrix}_{2\times3}$

13 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$= \begin{bmatrix} 15+0 & 0+4 \\ 0+0 & 0+8 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$= \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2}$

14 $\begin{bmatrix} 8 & 10 & -7 \end{bmatrix}_{1\times3} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}_{3\times1}$

$= \begin{bmatrix} 8-30+35 \end{bmatrix}_{1\times1}$

$= \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}_{1\times1}$

15 $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 9 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{3\times2} \times \begin{bmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$= \begin{bmatrix} 10+0 & -12-6 & 8+3 \\ -45+0 & 54-30 & -36+15 \\ -15+0 & 18-6 & -12+3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

$= \begin{bmatrix} 10 & -18 & 11 \\ -45 & 24 & -21 \\ -15 & 12 & -9 \end{bmatrix}_{3\times3}$

16 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$= \begin{bmatrix} 3+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+12 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}_{2\times2}$

17 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^2 =$

$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$= \begin{bmatrix} 9-2 & -3-5 \\ 6+10 & -2+25 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$= \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 16 & 23 \end{bmatrix}_{2\times2}$

18 $\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 =$

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$

لا يمكن ايجاد عملية الضرب لأن عدد أعمدة المصفوفة الأولى لا تساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية .

19 $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix} 8 & -14 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$= \begin{bmatrix} 16-16 & -28+28 \\ 0-12 & 0+21 \end{bmatrix}_{2\times2}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -12 & 21 \end{bmatrix}_{2\times2}$

**20** صناعة سيارات: تتوزع 3 مصانع لإحدى شركات صناعة السيارات في 3 مدن، ويبين الجدول المجاور عدد ما ينتجه كل مصنع يومياً من 3 طرازات للسيارات. إذا كان ربح الشركة في كل سيارة من الطراز X هو JD1000، ومن الطراز XD هو JD 2000، ومن الطراز R هو JD1500، فاستعمل ضرب المصفوفات في إيجاد ربح كل مصنع يومياً من جميع طرازات السيارات بافتراض أنّ جميع السيارات المنتجة مبيعة.

| | الطراز X | الطراز XD | الطراز R |
|---|---|---|---|
| المدينة A | 12 | 10 | 0 |
| المدينة B | 4 | 4 | 20 |
| المدينة C | 8 | 9 | 12 |

أولاً :
نكتب مصفوفة تمثل الـ 3 طرازات للسيارات في المدن الثلاثة كالتالي :

$$A=\begin{matrix}\\ \text{المدينة } A\\ \text{المدينة } B\\ \text{المدينة } C\end{matrix}\begin{bmatrix} X & XD & R \\ 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

ثانياً :
نكتب مصفوفة ربح كل سيارة من الطرازات الثلاثة كالتالي :

$$B=\begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{bmatrix}\begin{matrix} X \\ XD \\ R \end{matrix}$$

ثالثاً :
نضرب المصفوفة A في المصفوفة B فتنتج مصفوفة ربح كل مصنع يومياً من جميع =

طرازات السيارات كالتالي :

$$\begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix}_{3\times3} \times \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 32000 \\ 42000 \\ 44000 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

**21** إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

فأبين أنّ: $AB=AC$

$$AB=\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB=AC=\begin{bmatrix} 48 & 76 \\ 36 & 57 \end{bmatrix}$$

إذا كانت:

$$P=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix},\ R=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$n=-2$ فأجد كلاً مما يأتي:

**22** $(QR)P$

$$QR=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}\times\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}-9 & 0\\ 10 & -14\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$(QR)P=\begin{bmatrix}-9 & 0\\ 10 & -14\end{bmatrix}_{2\times2}\times\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}-108 & -36\\ -6 & -2\end{bmatrix}_{2\times2}$$

**23** $N(PQ)$

$$PQ=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}_{2\times2}\times\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}52 & -4 & 24\\ 39 & -3 & 18\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$\Rightarrow n(PQ)=-2\times\begin{bmatrix}52 & -4 & 24\\ 39 & -3 & 18\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-104 & 8 & -48\\ -78 & 6 & -36\end{bmatrix}$$

**24** $R(PQ)$

$$(PQ)=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}52 & -4 & 24\\ 39 & -3 & 18\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R(PQ)=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}52 & -4 & 24\\ 39 & -3 & 18\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-143 & 11 & -66\\ 273 & -21 & 126\\ 117 & -9 & 54\end{bmatrix}$$

**25** $(NR)P$

$$nR=-2\times\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -18 & 10\\ -6 & 2\end{bmatrix}$$

$$(nR)P=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -18 & 10\\ -6 & 2\end{bmatrix}_{3\times2}\times\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}66 & 22\\ -126 & -42\\ -54 & -18\end{bmatrix}_{3\times2}$$

إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ X & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ Y & 4\end{bmatrix}$$

حيث $X,Y$ عددان صحيحان موجبان ،فأجد:

**26** AB بدلالة X,Y

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ x & 3\end{bmatrix}_{2\times2}\times\begin{bmatrix}-2 & 0\\ y & 4\end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ (-2x+3y) & 12\end{bmatrix}$$

**27** BA بدلالة X,Y

$$BA=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ y & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 0\\ x & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ (2y+4x) & 12\end{bmatrix}$$

**28** أصغر قيمة صحيحة موجبة لكل من $Y,X$ التي تجعل $AB=BA$

$$AB=BA$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}-4 & 0\\ (3y-2x) & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ (2y+4x) & 12\end{bmatrix}$$

$$3y-2x=2y+4x$$

$$3y-2y=4x+2x$$

$$y=6x$$

← اصغر قيمة صحيحة موجبة لـ x هي ١
وعليه ستكون :

$$y=6(1)=6$$

$$\therefore\ \boxed{x=1}$$

$$\boxed{y=6}$$

**29 مكسرات:** يُعبئ محمص خليطاً من المكسرات والفواكه المُجفَّفة في نوعين من الأكياس كما في الجدول الأيسر، في حين يُبين الجدول الأيمن عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في الغرام الواحد من المكسرات والفواكه المجففة. استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في كل نوع.

| فواكه مُجفَّفة (g) | مُكسَّرات (g) |
|---|---|
| 150 | 150 |
| 100 | 200 |

| | بروتين | كربوهيدرات | دهون |
|---|---|---|---|
| مُكسَّرات | 20 | 21 | 52 |
| فواكه مُجفَّفة | 3 | 65 | 1 |

أولاً :

نكتب مصفوفة تمثل ما يعبؤه المصنع من مكسرات وفواكة في نوعين من الأكياس كالتالي :

$$A = \begin{bmatrix} 150 & 150 \\ 200 & 100 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{matrix} \leftarrow \text{الأكياس} \\ \\ \end{matrix}$$

(أعلى: مكسرات، فواكة مجففة)

ثانياً :

نكتب مصفوفة تمثل عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في الغرام الواحد من المكسرات والفواكة المجففة كالتالي :

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 21 & 52 \\ 3 & 65 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{matrix} \leftarrow \text{مكسرات} \\ \leftarrow \text{فواكة مجففة} \end{matrix}$$

(أعلى: بروتين، كربوهيدرات، دهون)

ثالثاً :

نضرب المصفوفة A في المصفوفة B فتنتج مصفوفة تمثل عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون من كل نوع كالتالي :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 150 & 150 \\ 200 & 100 \end{bmatrix}_{2\times 2} \times \begin{bmatrix} 20 & 21 & 52 \\ 3 & 65 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} 3450 & 12900 & 7950 \\ 4300 & 10700 & 10500 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{matrix} \leftarrow \text{مكسرات} \\ \leftarrow \text{فواكة مجففة} \end{matrix}$$

(أعلى: بروتين، كربوهيدرات، دهون)

30 دوّنت سلمى في الجدول المجاور عدد ما باعته في متجرها من أكواب حافظة للحرارة متعددة الحجوم (كبيرة، متوسطة، صغيرة)في أحد الأيام. كذلك دونت طريقة بيع هذه الأكواب؛ وهي إمّا مباشرة من المتجر، وأما عبر شبكة الإنترنت. إذا كان سعر الكوب الكبير 4.5 JD،وسعر الكوب المتوسط 4 JD، وسعر الكوب الصغير 3.5 JD، فكيف يمكن استعمال ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الذي كسبته سلمى من بيع الأكواب بكلتا طريقتي البيع؟

| | كبير | متوسط | صغير |
|---|---|---|---|
| عبر شبكة الانترنت | 5 | 4 | 2 |
| من المتجر | 3 | 5 | 9 |

أولاً :

نكتب مصفوفة تمثل عدد ما باعته سلمى في متجرها من أكواب حافظة للحرارة متعددة الحجوم وطريقة بيعها :

$$A = \begin{matrix} \\ \text{عبر شبكة الانترنت} \\ \text{من المتجر} \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} \text{صغير} & \text{متوسط} & \text{كبير} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ثانياً :

نكتب مصفوفة تمثل أسعار البيع:

$$B = \begin{matrix} \text{كبير} \\ \text{متوسط} \\ \text{صغير} \end{matrix} \begin{bmatrix} 4.5 \\ 4 \\ 3.5 \end{bmatrix}$$

ثالثاً :

بضرب المصفوفة A في المصفوفة B تنتج مصفوفة المبلغ الذي كسبته سلمى من طريقتي البيع

$$A \times B = \underset{2\times3}{\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \end{bmatrix}} \times \underset{3\times1}{\begin{bmatrix} 4.5 \\ 4 \\ 3.5 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{matrix} \\ \text{عبر الانترنت} \\ \text{من المتجر} \end{matrix} \begin{bmatrix} 45.5 \\ 65 \end{bmatrix}$$

## مهارات التفكير العليا

**31** **أكتشف الخطأ:** حسبت كل من رنا وعبير العنصر $C_{23}$ في المصفوفة :

$$C=\begin{bmatrix}5 & 7 & 12\\ -2 & 3 & 4\\ 6 & 9 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 8 & 4\\ 1 & -2 & -6\\ 11 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

كما يأتي:

إجابة عبير

$c_{23}=12-8-18$

$=-14$

إجابة رنا

$c_{23}=-8-18+20$

$=-6$

أيهما إجابتها صحيحة؟ أبرر إجابتي.

$$C=\begin{bmatrix}(10+7+132) & (40-14+36) & \cdots\\ (-4+3+44) & (-16-6+12) & (-8-18+20)\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}$$

$C_{23}$

∴ اجابة رنا هي الصحيحة

لأن :

$C_{23}=-8-18+20=-6$

كما هو موضح في المصفوفة C

**32** **تبرير:** إذا كانت A,B مصفوفتين مربعتين من الرتبة n، فلماذا

$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

$$(A+B)^2=(A+B)\times(A+B)$$

$$=A^2+AB+BA+B^2$$

لكن ليس بالضرورة أن تتساوى

$BA$ مع $AB$

حيث أن الخاصية التبديلية لا تنطبق على ضرب المصفوفات

وبالتالي :

$$AB+BA\neq 2AB$$

$$\Rightarrow (A+B)^2\neq A^2+AB+BA+B^2$$

**33** **مسألة مفتوحة:** أكتب المصفوفتين A,B، غير الصفريتين بحيث يكون AB=BA

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

34 تحدّ: أجد قيمة كل من e , f , g , h التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3e+4g & 3f+4h \\ -e+5g & -f+5h \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3e+4g & 3f+4h \\ -e+5g & -f+5h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$3e + 4g = 1$ ..... (1)
$-e + 5g = 6$ ..... (2)

⇐ بضرب المعادلة (2) في العدد 3 ينتج أن:

$3e + 4g = 1$ ..... (1)
$-3e + 15g = 18$ ..... (2)

بالجمع:

$$\frac{19g}{19} = \frac{19}{19}$$

$$\boxed{g = 1}$$

نعوض قيمة g في أي من المعادلتين ولتكن المعادلة (2):

$-e + 5(1) = 6$
$-e = 6 - 5$
$-e = 1$
$\boxed{e = -1}$

الآن:

$3f + 4h = 12$ ..... (1)
$-f + 5h = 15$ ..... (2)

⇐ بضرب المعادلة (2) في العدد 3 ينتج أن:

$3f + 4h = 12$ ..... (1)
$-3f + 15h = 45$ ..... (2)

بالجمع:

$$\frac{19h}{19} = \frac{57}{19}$$

$$\boxed{h = 3}$$

نعوض قيمة h في أي من المعادلتين ولتكن المعادلة (2):

$-f + 5h = 15$
$-f + 5(3) = 15$
$-f + 15 = 15$
$-f = 0$
$\boxed{f = 0}$

$\boxed{g=1}$ $\boxed{e=-1}$ $\boxed{h=3}$ $\boxed{f=0}$

أسئلة كتاب التمارين

إذا كانت $A_{5\times3}$، وكانت $B_{2\times3}$، وكانت $C_{3\times5}$، فأحدد عمليات الضرب الممكنة مما يأتي، ثم أجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1 **AB**

$$A_{5\times3} \times B_{2\times3}$$

لا يمكن إيجاد AxB لأن عدد أعمدة المصفوفة A لا تساوي عدد صفوف المصفوفة B

2 **AC**

$$A_{5\times3} \times C_{3\times5}$$

يمكن ايجاد AxC وستكون رتبتها $5\times5$

3 **CA**

$$C_{3\times5} \times A_{5\times3}$$

يمكن ايجاد CxA وستكون رتبتها $3\times3$

4 **BC**

$$B_{2\times3} \times C_{3\times5}$$

يمكن ايجاد BxC ورتبتها $2\times5$

5 **CB**

$$C_{3\times5} \times B_{2\times3}$$

لا يمكن ايجاد CxB لأن عدد أعمدة المصفوفة C لا تساوي عدد صفوف المصفوفة B

## أسئلة كتاب التمارين

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ ,$B=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ ,$D=\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

فأجد كلاً مما يأتي(إن أمكن):

### 6 AB

$$AB=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}\times\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}15+8 & 9-2 & -6-14\\ 5-16 & 3+4 & -2+28\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}23 & 7 & -20\\ -11 & 7 & 26\end{bmatrix}$$

### 7 BA

$$BA=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}_{2\times3}\times\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}$$

لا يمكن ايجاد المصفوفة BxA

### 8 BC

$$BC=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}_{2\times3}\times\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}_{3\times2}$$

$$=\begin{bmatrix}10-12-2 & 10+9-10\\ -8-4+7 & -8+3+35\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 9\\ -5 & 30\end{bmatrix}$$

### 9 CB

$$CB=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}_{3\times2}\times\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$=\begin{bmatrix}10-8 & 6+2 & -4+14\\ -20-12 & -12+3 & 8+21\\ 5-20 & 3+5 & -2+35\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix}$$

**10** $BD$

$$BD=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}_{2\times3}\times\begin{bmatrix}-3\\0\\-1\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$=\begin{bmatrix}-15+0+2\\12+0-7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-13\\5\end{bmatrix}_{2\times1}$$

**11** $2A+3BC$

$$2A=2\times\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & -4\\2 & 8\end{bmatrix}$$

$$BxC=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\-4 & 1 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 2\\-4 & 3\\1 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-4 & 9\\-5 & 30\end{bmatrix}$$

$$3BC=3\begin{bmatrix}-4 & 9\\-5 & 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12 & 27\\-15 & 90\end{bmatrix}$$

$$2A+3BC=\begin{bmatrix}6 & -4\\2 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-12 & 27\\-15 & 90\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-6 & -23\\-13 & 98\end{bmatrix}$$

**12** $A^2=A\times A=$

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9-2 & -6-8\\3+4 & -2+16\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -14\\7 & 14\end{bmatrix}$$

**13** $A^3=A^2\times A$

$$=\begin{bmatrix}7 & -14\\7 & 14\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -2\\1 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}21-14 & -14-64\\21+14 & -14+64\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & -78\\35 & 50\end{bmatrix}$$

**14** $(CB)^2=CB\times CB$

$$=\begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\-32 & -9 & 29\\-15 & 8 & 33\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\-32 & -9 & 29\\-15 & 8 & 33\end{bmatrix}$$

مناقرع $C$ (9)

$$=\begin{bmatrix}-402 & 24 & 582\\-211 & 57 & 376\\-781 & 72 & 1171\end{bmatrix}$$

15 إذا كانت:

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ X & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}Y & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -7\\ 8 & -3\end{bmatrix}$$

فأجد قيمة كل من $Y, X$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ x & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y+9 & -7\\ xy+6 & -x-4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}y+9 & -7\\ xy+6 & -x-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -7\\ 8 & -3\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow y+9=7$

$\boxed{y=-2}$

$-x-4=-3$

$-x=1$

$\boxed{x=-1}$

16 أجد ناتج:

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}15+2-12 & 12+4+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 16\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix}5 & 16\end{bmatrix}}\times\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}}$$

$$=\begin{bmatrix}30-48 & 10+80\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-18 & 90\end{bmatrix}$$

17 إذا كان: $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$، فأجد $B^3$

$B^3 = B^2 \times B$

$B^2 = B \times B = \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$

18 إذا كان: $A=\begin{bmatrix}6\\ 18\end{bmatrix}$ , $B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

، فأجد المصفوفة C ، بحيث يكون $A+C=BC$

ملاحظة: حتى نستطيع ايجاد مصفوفة $A+C$ لابد أن تكون رتبة C نفس رتبة A $\Leftarrow C_{2\times1}$

نفرض المصفوفة C كالتالي:

$C=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A+C = \begin{bmatrix}6\\ 18\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6+x\\ 18+y\end{bmatrix}$

الآن:

نجد BC بدلالة x,y

$BC = \begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}_{2\times2} \times \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}_{2\times1} \Rightarrow$

$= \begin{bmatrix}3x+4y\\ 2x-y\end{bmatrix}$

$A+C = BC$ معطيات

$\Rightarrow \begin{bmatrix}6+x\\ 18+y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3x+4y\\ 2x-y\end{bmatrix}$

$6+x = 3x+4y$

$2x+4y = 6 \quad \cdots\cdots (1)$

$18+y = 2x-y$

$2x-2y = 18 \quad \cdots\cdots (2)$

الآن:

$2x+4y = 6 \quad \cdots\cdots (1)$

$2x-2y = 18 \quad \cdots\cdots (2)$

بالطرح

$\frac{6y}{6} = \frac{-12}{6}$

$\boxed{y=-2}$

$2x-2(-2) = 18 \quad \cdots\cdots (2)$

$2x+4 = 18$

$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$

$\boxed{x=7}$

$\therefore \quad C=\begin{bmatrix}7\\ -2\end{bmatrix}$

**مبيعات: يبين الجدول الأيمن قيمة مبيعات أحذية الرجال والنساء والأطفال (بالدنانير) لثلاثة مندوبي مبيعات، ويبين الجدول الأيسر نسب العمولة القديمة والجديدة للمبيعات. أجيب عن السؤالين التاليين اعتماداً على المعلومات الواردة في هذين الجدولين:**

| | أحذية الرجال | أحذية النساء | أحذية الأطفال |
|---|---|---|---|
| المندوب 1 | 1200 | 2300 | 900 |
| المندوب 2 | 3100 | 2800 | 1100 |
| المندوب 3 | 3700 | 2600 | 800 |

| | النسبة القديمة | النسبة الجديدة |
|---|---|---|
| أحذية الرجال | 9% | 9.5% |
| أحذية النساء | 9% | 10% |
| أحذية الأطفال | 13% | 12% |

**19 أجد المصفوفة التي تمثل ما يجنيه كل من المندوبين الثلاثة وفق النسبة الجديدة والنسبة القديمة.**

أولاً:

نكتب مصفوفة تمثل قيمة مبيعات الأصناف الثلاثة من الأحذية للثلاث مندوبين كالتالي:

$$A = \begin{bmatrix} 1200 & 2300 & 900 \\ 3100 & 2800 & 1100 \\ 3700 & 2600 & 800 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{matrix} \text{مندوب 1} \\ \text{مندوب 2} \\ \text{مندوب 3} \end{matrix}$$

(رجال، نساء، أطفال)

ثانياً:

نكتب مصفوفة تمثل نسب العمولة القديمة والجديدة لمبيعات الأحذية (الثلاث أصناف)

$$B = \begin{bmatrix} 9\% & 9.5\% \\ 9\% & 10\% \\ 13\% & 12\% \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{matrix} \text{رجال} \\ \text{نساء} \\ \text{أطفال} \end{matrix}$$

(قديمة، جديدة)

$$B = \begin{bmatrix} 0.09 & 0.095 \\ 0.09 & 0.1 \\ 0.13 & 0.12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{رجال} \\ \text{نساء} \\ \text{أطفال} \end{matrix}$$

(قديمة، جديدة)

ثالثاً:

نكتب مصفوفة ما يجنيه كل من المندوبين الثلاث من عمولات وفقاً للنسب القديمة والجديدة، وذلك بإيجاد مصفوفة $A \times B$ كالتالي:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1200 & 2300 & 900 \\ 3100 & 2800 & 1100 \\ 3700 & 2600 & 800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.09 & 0.095 \\ 0.09 & 0.1 \\ 0.13 & 0.12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 432 & 452 \\ 674 & 706.5 \\ 671 & 707.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{مندوب 1} \\ \text{مندوب 2} \\ \text{مندوب 3} \end{matrix}$$

(قديمة، جديدة)

**20 أحدد المندوب الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة، ثم أبرر إجابتي.**

ملاحظة:

لتحديد المندوب الأكثر استفادة من تغيير النسبة نجد الفرق بمقدار ما جنيه كل مندوب ما بين النسبة القديمة والجديدة كالتالي: (وذلك بالرجوع إلى المصفوفة الناتجة من 20)

* مندوب 1 ⇐
$452 - 432 = 20$ JOD

* مندوب 2 ⇐
$706.5 - 674 = 32.5$ JOD

* مندوب 3 ⇐
$707.5 - 671 = 36.5$ JOD

∴ المندوب 3 هو أكثر مندوب إستفاده من تغيير النسبة.

**أحدّد إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أحياناً أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبداً، ثم أبرر إجابتي:**

**21 إذا أمكن إيجاد AB و BA ، فإن المصفوفة A والمصفوفة B مربعتان.**

ليس بالضرورة أن تكون المصفوفتان A و B مربعتان فمن الممكن مثلاً أن تكون :

$$A_{2\times3} \quad , \quad B_{3\times2}$$

$$\Rightarrow A_{2\times3} \times B_{3\times2} = AB_{2\times2}$$

$$B_{3\times2} \times A_{2\times3} = BA_{3\times3}$$

وبالتالي أمكن عملية الضرب بالحالتين بالرغم من أن المصفوفتان غير مربعتان لكن إذا كانت A مربعة و B مربعة ولهما نفس الرتبة فإنه يمكن بذلك ايجاد AB و BA ، على سبيل المثال

$$A_{2\times2} \quad , \quad B_{2\times2}$$

$$\Rightarrow A_{2\times2} \times B_{2\times2} = AB_{2\times2}$$

$$B_{2\times2} \times A_{2\times2} = BA_{2\times2}$$

وبالتالي نستطيع القول بأن العبارة صحيحة أحياناً .

**22 إذا كان AB مصفوفة صفرية، فإن A مصفوفة صفرية، أو B مصفوفة صفرية.**

غير صحيحة أبداً

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}_{1\times2}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times1}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$