إجابات أسئلة الدرس الرابع

الدرس الرابع : المحدّدات وقاعدة كريمر

المحدّدات

المحددة (determinant) للمصفوفة المربعة A هي عدد حقيقي يرتبط بالمصفوفة A، ويرمز إليه بالرمز |A|

يطلق على مجموعة العناصر الممتدة من الزاوية اليسرى العلوية إلى الزاوية اليمنى السفلية في المصفوفة اسم القطر الرئيس للمصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 9 & 8 & 10 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

القطر الرئيس

للقطر الرئيس دور أساسي في إيجاد محددة أي مصفوفة، لكن طريقة إيجاد المحددة تختلف تبعاً لاختلاف رتبتها.

وفي ما يأتي طريقة إيجاد محددة المصفوفة ذات الرتبة 2 × 2، أو ما يسمى محددة الدرجة الثانية

بالكلمات:
يرمز إلى محددة المصفوفة :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ بالرمز } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وتساوي قيمتها ناتج ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحاً منه ناتج ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل من المحددات الآتية:

1) $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (0)(4) - (-3)(1) = 0 + 3 = 3$

2) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 5(8) - 20(2) = 40 - 40 = 0$

3) $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9(-2) - 5(3) = -18 - 15 = -33$

الدرس الرابع : المحدّدات وقاعدة كريمر

يطلق على محددة المصفوفة ذات الرتبة 3 × 3 اسم محددة الدرجة الثالثة ويمكن حساب قيمتها بتوظيف محددة الدرجة الثانية كما هو مبين أدناه.

يمكن إيجاد محددة المصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

باستعمال محددة المصفوفة 2X2 على النحو التالي:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل محددة مما يأتي:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix} =$

$$(1)\big((3)(2)-(4)(7)\big) - 3\big((-2)(2)-(4)(-5)\big) + 9\big((-2)(7)-(3)(-5)\big)$$
$$= (1)(6-28) - 3(-4+20) + 9(-14+15)$$
$$= (1)(-22) - 3(16) + 9(1)$$
$$= -22 - 48 + 9$$
$$= -61$$

2) $\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =$

$$0(9-48) - (-5)(36-42) + (-1)(32-7)$$
$$= 0 - 30 - 25$$
$$= -55$$

حساب مساحة المثلث باستعمال المحددات

يمكن حساب مساحة مثلث عُلِمَت إحداثيات رؤوسه في المستوى الإحداثي باستعمال القاعدة الآتية.

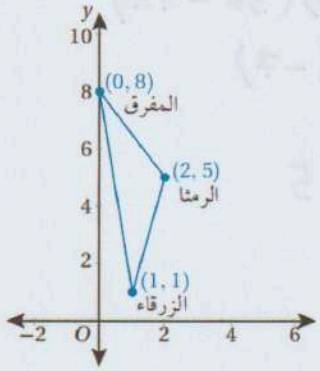
مساحة المثلث الذي إحداثيات رؤوسه:

$X(x_1, y_1), Y(x_2, y_2), Z(x_3, y_3)$

هي نصف القيمة المطلقة للعدد A، حيث:

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور إحداثيات كل من محافظة الزرقاء، ومحافظة الرمثا، ومحافظة المفرق. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 10 km، فأجد مساحة المنطقة التي رؤوسها هذه المحافظات الثلاث.



$$A=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 10 & 10 & 1 \\ 0 & 80 & 1 \\ 20 & 50 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow A = 10(80-50) - 10(0-20) + 1(0-1600)$$
$$= 300 + 200 - 1600$$
$$= -1100$$

$$\Rightarrow Area = \frac{1}{2}|A|$$
$$= \frac{1}{2}|-1100|$$
$$= \frac{1}{2} * 1100$$
$$= 550\ km^2$$

حل أنظمة المعادلات والمحددات

يمكن استعمال المحددات لحل أنظمة معادلات خطية بمتغيرين، كل منها مكتوب في صورة: $ax + by = c$.

- أنشئ أولاً مصفوفة عناصرها معاملات المتغيرين x وy، وهي تسمى مصفوفة المعاملات.
- ثم أحسب محددتها.
- إذا كانت المحددة لا تساوي صفراً فإنّه يوجد حل وحيد للنظام.
- إذا كانت المحددة تساوي صفراً فإما ألّا يكون للنظام حل، وإما أن يكون له عدد لا نهائي من الحلول.
- وفي حال لم تكن قيمة محددة مصفوفة المعاملات صفراً فيمكن استعمال قاعدة كريمر لإيجاد حل النظام كالآتي:

إذا كانت: $C=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

وكانت: $D=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ حيث: $D \neq 0$

فإن حل النظام هو:

$$X=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} \quad , \quad Y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

أتحقق من فهمي

أحل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إن أمكن):

1 $-2X+7Y=12$ ----- (1)
$X+Y=3$ ----- (2)

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}-2 & 7\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$\Rightarrow D=-2-7$
$=-9$

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}12 & 7\\ 3 & 1\end{vmatrix}}{-9}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}12 & 7\\ 3 & 1\end{vmatrix}=12-21=-9$$

$$\Rightarrow x=\frac{-9}{-9}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-2 & 12\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{-9}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}-2 & 12\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-6-12=-18$$

$$\Rightarrow y=\frac{-18}{-9}=2$$

∴ حل نظام المعادلات هو:

$(1,2)$

2 $4X-3Y=29$ ----- (1)
$2Y+5X=-5$ ---- (2)

نكتب المعادلة الثانية بالصيغة التالية:

$5x+2y=-5$ ----(2)

$4x-3y=29$ ----(1)
$5x+2y=-5$ ----(2)

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow D=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix}$$

$\Rightarrow D=8+15=23$

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}29 & -3\\ -5 & 2\end{vmatrix}}{23}$$

$$\begin{vmatrix}29 & -3\\ -5 & 2\end{vmatrix}=43 \Rightarrow \boxed{x=\frac{43}{23}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}4 & 29\\ 5 & -5\end{vmatrix}}{23} \Rightarrow \begin{vmatrix}4 & 29\\ 5 & -5\end{vmatrix}=-165$$

$$\Rightarrow y=\frac{-165}{23}$$

∴ الزوج المرتب: $\left(\frac{43}{23}, \frac{-165}{23}\right)$

أتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كل من المحددات الآتية:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= (2)(3) - (-5)(1)$
$= 6 + 5$
$= 11$

2) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0 - (5)(-4)$
$= 0 + 20$
$= 20$

3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

$= (3)(4) - 6(2)$
$= 12 - 12$
$= 0$

4) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

$= 0(24+14) - (-3)(15+8) + 1(35-32)$

$= 0 + 69 + 3$
$= 72$

5) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= -4(10-3) - 3(12+4) + 2(18+20)$

$= -28 - 48 + 76$
$= 0$

6) $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= -6(5-0) - (-1)(2-0)$
$+ (-2)(6-20)$

$= -30 + 2 + 28$
$= 0$

7 أجد مساحة المثلث المرسوم في المستوى الإحداثي، الذي إحداثيات رؤوسه:
(5, 3), (2, 4), (6, -8)

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = -5(4-8) - 3(2-6) + (1)(16-24)$$

$$= 20 + 12 - 8$$

$$= 24$$

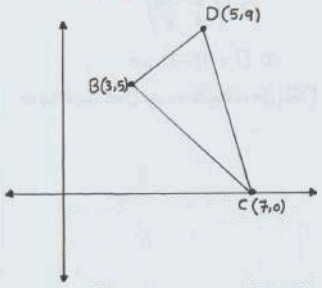
$$Area = \frac{1}{2}|A|$$

$$= \frac{1}{2}|24|$$

$$= \frac{1}{2} * 24$$

$\therefore Area = 12$ وحدة مربعة

8 خرائط: يقع منزل خولة عند النقطة B(3, 5) على خريطة إحداثية للمدينة، ويقع منزل فدوى عند النقطة C(7, 0)، ويقع منزل نهى عند النقطة D(5, 9). أجد مساحة المثلث BCD، علماً بأن الوحدة الواحدة على الخريطة تمثل 20 m على الأرض.



* الأبعاد على الواقع (الأرض) كالتالي:

B(60, 100) , C(140, 0) , D(100, 180)

$$\Rightarrow A = \begin{vmatrix} 60 & 100 & 1 \\ 140 & 0 & 1 \\ 100 & 180 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = 60(0-180) - 100(140-100) + 1(140(180) - 0)$$

$$= -10800 - 4000 + 25200$$

$$= 10400$$

$$\Rightarrow Area = \frac{1}{2}|10400|$$

$$= \frac{1}{2} * 10400$$

$$= 5200\ m^2$$

أحل كل نظام معادلات مما يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إن أمكن):

9 $X + 5Y = -17$ ---- (1)
$3X - 4Y = 6$ ---- (2)

$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19$

$\Rightarrow X = \dfrac{\begin{vmatrix} -17 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{-19}$

$X = \dfrac{38}{-19} \quad \therefore \boxed{X = -2}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -17 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}}{-19} = \dfrac{57}{-19}$

$\therefore \boxed{y = -3}$

∴ الزوج المرتب : $(-2, -3)$

10 $2X - 3Y = 29$ ---- (1)
$6Y - 4X = 12$ .... (2)

$\Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow D = 12 - 12 = 0$

⇐ بما أن $D=0$ فإنه لا يمكن حل النظام.

11 $5X - 4Y = 22$ ---- (1)
$4X + 3Y = -1$ ---- (2)

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow D = 15 + 16 = 31$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 22 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{31} = \frac{66-4}{31}$$

$$x = \frac{62}{31} = 2 \qquad \boxed{x=2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 22 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{31} = \frac{-5-88}{31}$$

$$= \frac{-93}{31} = -3 \qquad \boxed{y=-3}$$

∴ الزوج المرتب : $(2, -3)$

12 $6X - 7Y = -11$ -----(1)
$5X + 4Y = 40$ -----(2)

$$C = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow D = 24 + 35$
$= 59$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -7 \\ 40 & 4 \end{vmatrix}}{59} = \frac{-44+280}{59} = 4$$

$\therefore \boxed{x=4}$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -11 \\ 5 & 40 \end{vmatrix}}{59} = \frac{240+55}{59} = 5$$

$\therefore \boxed{y=5}$

∴ الزوج المرتب هو : $(4, 5)$

13 ما قيمة c التي تجعل محددة مصفوفة المعاملات للنظام الآتي تساوي صفرا؟

$$2X+Y=6$$
$$CY=3-X$$

$$2x+y=6 \quad \text{-----(1)}$$
$$x+cy=3 \quad \text{---(2)}$$

$$C=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & c\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & c\end{vmatrix}=2c-1$$

$$\Rightarrow 2c-1=0$$
$$2c=1$$
$$\boxed{c=\frac{1}{2}}$$

14 يطلق اسم المثلث الذهبي على واحدة من أهم الوجهات السياحية في جنوب الأردن، وهي المنطقة التي تضم مدينة العقبة ومدينة البترا ووادي رم.
إذا كانت إحداثيات مدينة العقبة على خريطة للمملكة في مستوى إحداثي، وحدته 1Km، هي: (0, 0) للعقبة، و(116, 56) للبترا، و(50, 6) لوادي رم، فاستعمل المحددات لحساب مساحة المثلث الذي رؤوسه هذه المواقع الثلاثة.

$$A=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 56 & 116 & 1\\ 6 & 50 & 1\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow A=(56)(50)-116(6)$$
$$=2104$$

$$\Rightarrow Area=\frac{1}{2}|2104|$$
$$=\frac{1}{2}*2104$$
$$=1052\ km^2$$

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب مصفوفة مربعة من الرتبة 2 × 2 تحقق الشرط المعطى في كل مما يأتي:

15 محددتها تساوي صفراً.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

16 محددتها تساوي 1 - .

$$B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$$

17 جميع عناصرها أعداد موجبة، ومحددتها 12- .

$$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 5 & 3\end{bmatrix}$$

18 تحدّ: عند حل نظام من معادلتين بمتغيرين باستعمال قاعدة كريمر، فإن الحل هو:

$$X=\frac{\begin{vmatrix}7 & a\\ b & c\end{vmatrix}}{5} \quad ، \quad Y=\frac{\begin{vmatrix}7 & a\\ b & c\end{vmatrix}}{D} \quad \text{و}$$

ما قيمة كل من a، وb، وc؟

$$X=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{D}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{D}$$

$$\Rightarrow D\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=5$$

$b_1=2$, $b_2=4$

$c_1=1=a$, $c_2=3=c$

$a_1=7$, $a_2=b$

المعادلات كالتالي :

$7x+2y=1$ -----(1)

$bx+4y=3$ ----(2)

$$\Rightarrow D\begin{vmatrix}7 & 2\\ b & 4\end{vmatrix}=5$$

$\Rightarrow 28-2b=5 \Rightarrow -2b=-23$

$\boxed{b=\frac{23}{2}}$

$\boxed{a=1}$ $\boxed{c=3}$

تابع حل فرع 18.....

طريقة أخرى للحل

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{D}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{5}$$

$$x = \frac{-2}{5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 7 & a \\ b & c \end{vmatrix}}{D}$$

$c_1 = 1 = a$, $c_2 = 3 = c$

$\boxed{a=1}$, $\boxed{c=3}$

$b_1 = 2$, $b_2 = 4$

$a_1 = 7$, $a_2 = b$

$a_1 x + b_1 y = c_1$ ----- (1)

$a_2 x + b_2 y = c_2$ ---- (2)

$a_1 x + b_1 y = c_1$

$$\Rightarrow 7\left(\frac{-2}{5}\right) + 2y = 1$$

$$-\frac{14}{5} + 2y = 1$$

$$2y = 1 + \frac{14}{5}$$

$$2y = \frac{19}{5} \Rightarrow \boxed{y = \frac{19}{10}}$$

$$\Rightarrow b\left(\frac{-2}{5}\right) + \cancel{4}^{2}\left(\frac{19}{\cancel{10}_{5}}\right) = 3$$

$$-\frac{2b}{5} + \frac{38}{5} = 3$$

$$\frac{-2b + 38}{5} = 3$$

$$-2b + 38 = 15$$

$$-2b = -23$$

$$\boxed{b = \frac{23}{2}}$$

$\therefore$ $\boxed{a=1}$, $\boxed{b=\frac{23}{2}}$, $\boxed{c=3}$

أسئلة كتاب التمارين

أجد قيمة كل من المحددات الآتية:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11$

2) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$

3) $\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0$

4) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} =$

$7(0+20) - (-3)(48-8) + 1(-40-0)$

$= 140 + 120 - 40$

$= 220$

5) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$

$4(-6-0) + 2(12+6) - 4(0+3)$

$= -24 + 36 - 12$

$= 0$

6) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} =$

$5(56-12) + 3(32+12) + 1(8+14)$

$= 220 + 132 + 22$

$= 374$

7) إذا كان:

$A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

فأجد قيمة كل من: $|AB|$ ، و $|BA|$.

$AB = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |AB| = -6 - 4 = -10$

الآن:

$BA = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -9 & 26 \\ -10 & 25 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow |BA| = 35$

8 إذا كانت: $\begin{vmatrix} X & 8 \\ 2 & X \end{vmatrix} = 9$ فأجد قيمة X .

$$x^2 - 16 = 9$$
$$x^2 = 25$$
$$\boxed{x = \pm 5}$$

9 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ، فأجد محددة A^2 ، ثم أبين علاقتها بمحددة A.

$$|A| = 4$$
$$\Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow |A^2| = 0 + 16 = 16$$

نلاحظ أن :

$$|A^2| = |A|^2$$

يعني أن محددة A^2 هي نفسها تربيع محددة A .

10 تعطى معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ بالقاعدة:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أستعمل هذه القاعدة لإيجاد معادلة المستقيم المارّ بالنقطتين (5-, 2), (3, 1-)

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - y_1 x_2 = 0$$

لكن :

المستقيم يمر بالنقطتين :

$$\overset{x_1}{(-1} , \overset{y_1}{3)} \quad , \quad \overset{x_2}{(2} , \overset{y_2}{-5)}$$

$$\Rightarrow x(3-(-5)) - y(-1-2) + (-1)(-5) - 3(2) = 0$$

$$\Rightarrow 8x + 3y + 5 - 6 = 0$$

$$\therefore \boxed{8x + 3y = 1}$$

أحل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال قاعدة كريمر :

11 $3X-5Y=22$
$2X+Y=6$

$\Rightarrow D=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=13$

$\Rightarrow x=\dfrac{\begin{vmatrix}22 & -5\\ 6 & 1\end{vmatrix}}{13}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}22 & -5\\ 6 & 1\end{vmatrix}=22+30=52$

$\Rightarrow x=\dfrac{52}{13}=4$

$y=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 22\\ 2 & 6\end{vmatrix}}{13}$

$\Rightarrow y=\dfrac{18-44}{13}=-2$

$\therefore \boxed{x=4}\ ,\ \boxed{y=-2}$

∴ الزوج المرتب هو:

$(4,-2)$

12 $3Y+5X=7$
$2X-4Y=8$

$5x+3y=7$ ----- (1)
$2x-4y=8$ ----- (2)

$\Rightarrow D=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 2 & -4\end{vmatrix}$

$=-20-6=-26$

$\Rightarrow x=\dfrac{\begin{vmatrix}7 & 3\\ 8 & -4\end{vmatrix}}{-26}$

$x=\dfrac{-28-24}{-26}$

$\boxed{x=2}$

$y=\dfrac{\begin{vmatrix}5 & 7\\ 2 & 8\end{vmatrix}}{-26}$

$\therefore \boxed{y=-1}$

∴ الزوج المرتب هو:

$(2,-1)$

13 $3X = Y + 10$
$4Y = 6 + 5X$

$3x - y = 10$ ----- (1)
$-5x + 4y = 6$ ----- (2)

$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$

$D = 12 - 5 = 7$

$\Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{7}$

$x = \dfrac{40+6}{7} = \dfrac{46}{7}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}}{7}$

$y = \dfrac{36+50}{7} = \dfrac{86}{7}$

∴ الزوج المرتب هو:

$\left(\dfrac{46}{7}, \dfrac{86}{7}\right)$

14 حلّت سلمى نظاماً من معادلتين خطيتين بالمتغيرين x، وy باستعمال قاعدة كريمر، فوجدت أن:

$X = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{D}$ ، و $Y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{D}$

ما قيمة كل من X، وY؟

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{D}$, $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{D}$

$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \Rightarrow D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow D = 8 - 5$
$D = 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{3}$

$x = \dfrac{6+5}{3} = \dfrac{11}{3}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{3}$

$\Rightarrow y = \dfrac{-4-3}{3} \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{-7}{3}}$

$\therefore x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-7}{3}$

15 أجد مساحة المثلث الذي رؤوسه:
A(−2, 5), B(7, 11), C(1, 15)
باستعمال المحددات.

$$E = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 7 & 11 & 1 \\ 1 & 15 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(11-15) - 5(7-1) + 1(105-11)$$

$$= 8 - 30 + 94$$

$$= 72$$

$$Area = \frac{1}{2}|72|$$

$$= \frac{1}{2} * 72$$

$$= 36 \text{ وحدة مربعة}$$

16 نقود: يوجد في صندوق محاسب 75 ورقة نقد أردنية من فئة الدينار وخمسة الدنانير وعشرة الدنانير، تبلغ قيمتها الإجمالية JD 460. إذا كان عدد أوراق النقد من فئة خمسة الدنانير يساوي 4 أمثال عدد أوراق النقد من فئة الدينار، فأجد عدد ما في الصندوق من أوراق النقد لكل فئة باستعمال قاعدة كريمر.

نفرض أن:

① عدد الأوراق من فئة الدينار x

② عدد الأوراق من فئة 5 دنانير y

③ عدد الأوراق من فئة 10 دنانير z

⇐ نستنتج معادلة تمثل عدد الأوراق النقدية كالتالي:

$$x + y + z = 75 \quad ---(1)$$

كذلك نستنتج معادلة تمثل القيمة الإجمالية لهذه الأوراق كالتالي:

$$x + 5y + 10z = 460 \quad ---(2)$$

لكن نلاحظ من خلال المعطيات أن:

عدد أوراق النقد من فئة 5 دنانير تساوي 4 أمثال عدد أوراق النقد من فئة الدينار

$$\Rightarrow \boxed{y = 4x}$$

$$x + 4x + z = 75 \quad ---(1)$$

$$\Rightarrow 5x + z = 75 \quad ---(1)$$

⇐

$$x + 5(4x) + 10z = 460 \quad ---(2)$$

$$\Rightarrow x + 20x + 10z = 460$$

$$21x + 10z = 460 \quad ---(2)$$

⇐ الصيغة الثنائية للمعادلات:

$$5x + z = 75 \quad ---(1)$$

$$21x + 10z = 460 \quad ---(2)$$

⇐ باستخدام قاعدة كريمر:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 21 = 29$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 75 & 1 \\ 460 & 10 \end{vmatrix}}{29}$$

$$\boxed{x = 10}$$

$$y = 4(10) = 40$$

$$\boxed{y = 40}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 75 \\ 21 & 460 \end{vmatrix}}{29}$$

$$\Rightarrow \boxed{z = 25}$$

∴ عدد الأوراق من فئة الدينار هو 10.

عدد الأوراق من فئة 5 دنانير هو 40.

عدد الأوراق من فئة 10 دنانير هو 25.