إجابات أسئلة الدرس الخامس

الدرس الخامس :
النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

مصفوفة الوحدة .

معلوم أنَّ ناتج ضرب أي عدد حقيقي في العدد1 هو العدد نفسه؛ إذ إنّ
$x(1) = 1(x) = x$ لأي عدد حقيقي x.
لذلك يُسمى العدد 1 عنصرًا مُحايداً لعملية ضرب الأعداد الحقيقية

كذلك توجد مصفوفة مُربَّعة تُسمى مصفوفة الوحدة ، ويُرمز إليها بالرمز I ويكون جميع عناصر قطرها الرئيس 1 وتكون بقية عناصرها أصفاراً، وتمتاز بخاصية في ضرب المصفوفات تُشبه خاصية العدد 1 في ضرب الأعداد الحقيقية

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

يمكن التحقق من أن ناتج ضرب المصفوفة I في أي مصفوفة مربعة A لها نفس رتبة I هو المصفوفة A نفسها ، أي أن:

$$I \times A = A \times I = A$$

المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات

مصفوفة الوحدة I هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات، التي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان ناتج الضرب هو المصفوفة الأخرى نفسها .

لأي مصفوفة مربعة A ، لها رتبة المصفوفة المحايدة I نفسها، فإنَّ:

$$I \times A = A \times I = A$$

النظير الضربي للمصفوفة المربعة

إذا كانت المصفوفتان A, B مربعتين من الرتبة نفسها، وكان:

$$A \times B = B \times A = I$$

فإن المصفوفة A تسمى نظيراً ضربياً للمصفوفة B ، وتسمى المصفوفة B أيضاً نظيراً ضربياً للمصفوفة A.

النظير الضربي للمصفوفة المربعة A هو المصفوفة A^{-1} ، حيث :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

إيجاد النظير الضربي لمصفوفة مربّعة من الرتبة 2X2

إذا كانت محددة المصفوفة تساوي صفراً، فلا نظير ضربيا لها، وتسمى عندئذ مصفوفة منفردة

أما المصفوفة التي محددتها لا تساوي صفراً، ولها نظير ضربي، فتسمى مصفوفة غير منفردة

إذا كانت محددة المصفوفة المربعة A ذات الرتبة 2 × 2 لا تساوي صفراً، فإن لها نظيراً ضربياً يمكن إيجاده باتباع الخطوات الآتية:

1. تبديل موقع كل من عنصري القطر الرئيس.
2. ضرب عنصري القطر الآخر في 1- .
3. ضرب المصفوفة الناتجة في مقلوب المحددة، أو $\left(\frac{1}{|A|}\right)$

إذا كانت $|A| \neq 0$ ، فإن النظير الضربي للمصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

أتحقق من فهمي

أبين في كل مما يأتي ما إذا كانت كل مصفوفة تمثل نظيراً ضربياً للأخرى:

1) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -12 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$AB \neq I$ ∴ فإن كلاً من المصفوفة A والمصفوفة B لا تمثل نظيراً ضربياً للأخرى .

2) $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$C \times D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D \times C = \begin{bmatrix} 2.5 & -1.5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$CD = DC = I$

∴ كلاً من C وَ D تمثل نظيراً ضربياً للأخرى .

المعادلات المصفوفية

المعادلة المصفوفية هي معادلة تتضمن مصفوفات مجهولة (أو تكون بعض عناصرها مجهولة)، ومصفوفات معلومة، إضافة إلى عمليات على تلك المصفوفات.

أما **طريقة حل المعادلة المصفوفية** : $AX = B$ فتشبه طريقة حل المعادلة: $ax = b$، حيث a, b أعداد حقيقية.

معادلة جبرية		معادلة مصفوفية	
$ax = b$		$AX = B$	
$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b)$	بضرب الطرفين في $\frac{1}{a}$	$A^{-1}(AX) = A^{-1} \times B$	بضرب الطرفين في A^{-1}
$(\frac{1}{a} \times a)x = \frac{b}{a}$	خاصية التجميع	$(A^{-1} \times A)X = A^{-1}B$	خاصية التجميع
$(1)x = \frac{b}{a}$	خاصية النظير الضربي	$(I)X = A^{-1}B$	خاصية النظير الضربي
$x = \frac{b}{a}$	خاصية الضرب في العنصر المحايد	$X = A^{-1}B$	خاصية الضرب في المصفوفة المحايدة

لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، أحوّلهما أولاً إلى معادلة مصفوفية صورتها: $AX = B$، حيث A مصفوفة معاملات المُتغيّرين، وX مصفوفة المتغيرات في المعادلتين الخطيتين، وB مصفوفة الثوابت، فيكون حلها هو: $X = A^{-1}B$.

أتحقق من فهمي

أبين إذا كانت كل من المصفوفات الآتية منفردة أو غير منفردة، ثم أجد النظير الضربي لغير المنفردة منها:

1) $H = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$|H| = -6 + 6 = 0$

بما أن $|H| = 0$ فإن المصفوفة H منفردة ولا نظير ضربي لها.

2) $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -2$

بما أن $|J| \neq 0$ فإن المصفوفة J غير منفردة وعليه فإنه يمكن إيجاد النظير الضربي لها

$|J| = -2 \Rightarrow J^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

3) $K = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

$|K| = 13$

بما أن $|K| \neq 0$ فإن المصفوفة K غير منفردة وعليه، فإن النظير الضربي

$K^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{bmatrix}$

أتحقق من فهمي

أحل نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

$$3X - Y = 13$$
$$3Y - 2X = 4$$

$$3x - y = 13$$
$$-2x + 3y = 4$$

أولاً:
نكتب المعادلة المصفوفية التي تمثل هذا النظام:

$$AX = B$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ثانياً:
نجد A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

ثالثاً:
نجد $A^{-1} \times B$

$$\Rightarrow A^{-1} \times B = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{43}{7} \\ \frac{38}{7} \end{bmatrix}$$

∴ حل النظام هو:
$$\left(\frac{43}{7}, \frac{38}{7}\right)$$

أتحقق من فهمي

طهي: يوجد في معمل للحلويات محلولان تركيز السكر في أحدهما 12%، وتركيزه في الآخر 20%. يريد الطاهي تحضير 20L من محلول، تركيز السكر فيه 15%. كم لترًا سيستعمل الطاهي من كلا المحلولين المتوافرين في المعمل؟ أكتب معادلة مصفوفية تمثل المسألة، ثمَّ أحلُّها.

نفرض أن الطاهي سيستعمل x لتراً من المحلول تركيزه 12٪.

وأنه سيستعمل y لتراً تركيزه 20٪ من المحلول الآخر

نكتب نظام المعادلات الذي يمثل هذه المسألة كالتالي:

① المعادلة الأولى: مجموع الكميتين هو 20L، والمعادلة التي تعبر عن ذلك

$$x + y = 20 \quad \text{---(1)}$$

② المعادلة الثانية: كمية السكر في x لتراً مضافاً إليها كمية السكر في y لتراً تساوي كمية السكر في 20L

$$0.12x + 0.2y = 3 \quad \text{---(2)}$$

$$x + y = 20 \quad \text{---(1)}$$
$$0.12x + 0.2y = 3 \quad \text{---(2)}$$

المعادلة المصفوفية:

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{0.08}\begin{bmatrix} 0.2 & -1 \\ -0.12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.5 & -12.5 \\ -1.5 & 12.5 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2.5 & -12.5 \\ -1.5 & 12.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ 7.5 \end{bmatrix}$$

∴ حل النظام هو: $(12.5, 7.5)$

سيستخدم الطاهي إذن:

① 12.5L من المحلول ذو التركيز 12٪ من السكر.

② 7.5L من المحلول ذو التركيز 20٪ من السكر.

أتدرب وأحل المسائل

أبين في كل مما يأتي ما إذا كانت كل مصفوفة تمثل نظيراً ضربياً للأخرى:

1) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$

$A\times B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

$\therefore AB\neq I$ وعليه فإن كلاً من A و B لا تمثل نظيراً ضربياً للأخرى .

2) $C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

$C\times D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $\quad D\times C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$CD=DC=I$

$\therefore$ كلاً من C و D تمثل نظيراً ضربياً للآخر

3) $L=\begin{bmatrix}6 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $M=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & 2\end{bmatrix}$

$L\times M=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -\frac{1}{3} & 2\end{bmatrix}$

$\therefore LM\neq I$ وعليه فإن كلاً من L و M لا تمثل نظيراً ضربياً للأخرى .

4) $G=\begin{bmatrix}-3 & -11\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $H=\begin{bmatrix}-1.5 & 5.5\\ -0.5 & 1.5\end{bmatrix}$

$GH=\begin{bmatrix}10 & -33\\ -3 & 10\end{bmatrix}$

$\therefore GH\neq I$ وعليه فإن كلاً من G و H لا تمثل نظيراً ضربياً للأخرى .

أبين إذا كانت كل من المصفوفات الآتية منفردة أو غير منفردة، ثم أجد النظير الضربي لغير المنفردة منها:

5 $P=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

$|P| = -2$

$\because |P| \neq 0$ وبالتالي فإن P غير منفردة

وبالتالي النظير الضربي:

$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

6 $Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{6} & \end{bmatrix}$

$|Q| = \frac{1}{6}$

$\because Q$ غير منفردة، النظير الضربي:

$Q^{-1} = 6\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

7 $S=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -2 & -2\end{bmatrix}$

$|S| = -12$

$\because S$ غير منفردة، النظير الضربي:

$S^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$

8 $V=\begin{bmatrix}8 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

$|V| = 10$

$\because V$ غير منفردة، النظير الضربي:

$V^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 8\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$

أحل نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

9 $3X + 5Y = 13$
$X - 2Y = -3$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}13\\ -3\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

∵ المعادلة المصفوفية:

$$AX = B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix}-2 & -5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{2}{11} & \frac{5}{11}\\ \frac{1}{11} & \frac{-3}{11}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{2}{11} & \frac{5}{11}\\ \frac{1}{11} & \frac{-3}{11}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}13\\ -3\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$$

∴ الحل هو: $(1, 2)$

10 $-2X + 4Y = 6$
$X + 2Y = 7$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}6\\ 7\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

∵ المعادلة المصفوفية:

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-2}{8} & \frac{-1}{8}\\ \frac{-4}{8} & \frac{2}{8}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{-2}{8} & \frac{-1}{8}\\ \frac{-4}{8} & \frac{2}{8}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\ 7\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}\frac{-19}{8}\\ \frac{-5}{4}\end{bmatrix}$$

∴ الحل هو: $\left(-\frac{19}{8}, \frac{-5}{4}\right)$

11 $5X - 8Y = 31$
$2Y - 3X = -13$

$5x - 8y = 31$
$-3x + 2y = -13$

$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ المعادلة المصفوفية:

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{12} & -\frac{8}{12} \\ -\frac{3}{12} & -\frac{5}{12} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{12} & -\frac{8}{12} \\ -\frac{3}{12} & -\frac{5}{12} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} \frac{42}{12} \\ -\frac{28}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{6} \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$

$\therefore$ الحل هو: $\left(\frac{21}{6}, -\frac{7}{3}\right)$

12 $X + Y = 20$
$X - 2Y = -1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ المعادلة المصفوفية:

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

$A^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\therefore$ الحل هو $(13, 7)$

13 $3X + 2Y = 8$
$X = Y + 1$

$3x + 2y = 8$
$x - y = 1$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

⇐ المعادلة المصفوفية هي:

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} \\ -\frac{19}{5} \end{bmatrix}$

∴ الحل هو: $\left(\frac{7}{5}, -\frac{19}{5}\right)$

14 $2X + 7Y = 24$
$4X + 13Y = 46$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 13 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

⇐ المعادلة المصفوفية هي:

$AX = B$

$X = A^{-1}B$

$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{4}{2} & -\frac{2}{2} \end{bmatrix}$

⇒ $X = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

∴ الحل هو: $(5, 2)$

15 صيدلة: لدى صيدلي محلولان تركيز الملح في أحدهما 2%، وتركيزه في الآخر 12%. وهو يريد تحضير 10L من محلول، تركيز الملح فيه 10%. ما المعادلة المصفوفية التي يتعيّن استعمالها لتحضير الكمية المطلوبة من المحلول؟ أكتب معادلة مصفوفية تمثل المسألة، ثم أحلّها.

نفرض أن كمية المحلول الذي تركيز الملح فيه 2% هو x.

كذلك نفرض أن كمية المحلول الذي تركيز الملح فيه 12% هو y.

وعليه ستكون المعادلة الأولى التي تمثل مجموع الكميتين وهو 10 لتر هي:

$$x+y=10 \quad ----(1)$$

الآن:
نكتب المعادلة الثانية في النظام والتي ستمثل كمية الملح في المحلول كالتالي:

$$0.02x+0.12y=1 \quad ----(2)$$

∴ النظام هو:

$$x+y=10 \quad ----(1)$$
$$0.02x+0.12y=1 \quad ----(2)$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0.02 & 0.12\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}10\\ 1\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

⇐ المعادلة المصفوفية:

$$AX=B$$
$$X=A^{-1}B$$
$$A^{-1}=10\begin{bmatrix}0.12 & -1\\ -0.02 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1.2 & -10\\ -0.2 & 10\end{bmatrix}$$
$$X=\begin{bmatrix}1.2 & -10\\ -0.2 & 10\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}10\\ 1\end{bmatrix}$$
$$X=\begin{bmatrix}2\\ 8\end{bmatrix}$$

∴ الحل هو: (2, 8)

⇐ سيتعين على الصيدلي تحضير 2L من المحلول الذي تركيز الملح فيه 2%.

⇐ وتحضير 8L من المحلول الذي تركيز الملح فيه 12%.

16 أوراق نقدية: مع سعاد مجموعة من الأوراق النقدية من فئة JD 10، وفئة JD 20، تبلغ قيمتها الإجمالية JD 750. إذا علمتُ أنّ عدد أوراق فئة العشرين دينارًا يقل عن مثلي عدد أوراق فئة عشرة الدنانير بمقدار 5 أوراق، فأكتب معادلة مصفوفية تُمثّل المسألة، ثمّ أحلّها لإيجاد عدد أوراق النقد التي مع سعاد من كلتا الفئتين.

نفرض أن :

عدد الأوراق من فئة 10 هو x .

عدد الأوراق من فئة 20 هو y .

$$10x + 20y = 750 \quad ----(1)$$
$$2x - y = 5 \quad ----(2)$$

∴ المعادلة المصفوفية :

$$AX = B$$
$$X = A^{-1}B$$
$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{50}\begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{20}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{10}{50} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{20}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{10}{50} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{20}{50} \\ \frac{2}{50} & -\frac{10}{50} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 17 \\ 29 \end{bmatrix}$$

∴ سيكون مع سعاد

17 ورقة من فئة 10 دنانير .

و 29 ورقة من فئة 20 دينار .

17 ما قيمة x التي تجعل المصفوفة :

$\begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ منفردة؟

$20 - 2x = 0$

$\frac{20}{2} = \frac{2x}{2}$

$\boxed{x = 10}$

18 ما قيمة a التي تجعل المصفوفة:

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ نظيرا ضربيًا لنفسها؟

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = I$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \pm 1}$

19 أحل المعادلة المصفوفية :

$X \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 14 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 14 \end{bmatrix}$

ح المعادلة المصفوفية :

$XA = B$

$X = BA^{-1}$

$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-3}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow BA^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-3}{2} \\ -3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

20 إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$

فأجد المصفوفة C ، بحيث يكون $(B+C)^{-1}=A$

$$(B+C)^{-1}=A$$

$$\Rightarrow B+C=A^{-1}$$

$$C=A^{-1}-B$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$

$$\therefore C=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

21 إذا كانت A مصفوفة من الرتبة 2X2 ، حيث :
$A^2=2A-3I$ فأثبت أن : $A^3=A-6I$

$$A^2=2A-3I$$

$$A^3=A\cdot A^2$$

$$\Rightarrow A^3=A(2A-3I)$$

$$A^3=2A^2-3AI$$

$$=2A^2-3A$$

$$=2(2A-3I)-3A$$

$$=4A-6I-3A$$

$$\therefore A^3=A-6I$$

22 استأجر منظمو رحلة بحرية في خليج العقبة 8 قوارب، بعضها يحمل 4 أشخاص، وبعضها الآخر يحمل 7 أشخاص. إذا كان عدد المشاركين في الرحلة 50 شخصًا، فأستعمل معادلة مصفوفية لإيجاد عدد القوارب المستأجرة من كل نوع.

نفرض أن:
عدد القوارب التي تحمل 4 أشخاص هي x.
عدد القوارب التي تحمل 7 أشخاص هي y.

∴ نظام المعادلات هو:

$$x+y=8 \quad ---(1)$$
$$4x+7y=50 \quad ---(2)$$

∴ المعادلة المصفوفية:

$$AX=B$$
$$X=A^{-1}B$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

∴

$$B=\begin{bmatrix}8\\ 50\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{7}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8\\ 50\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix}$$

∴ عدد القوارب المستأجرة والتي تحمل 4 أشخاص هي اثنان (2).

عدد القوارب المستأجرة التي تحمل 7 أشخاص هي ستة (6).

مهارات التفكير العليا

23 تبرير: إذا كانت: $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وكانت:
$a>0, d>0, b<0, c<0$ فهل توجد عناصر سالبة في A^{-1}؟ أبرر إجابتي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = ad-bc$$

* ملاحظة:
$|A|\neq 0$ (معطيات).

* الحالة الأولى:

$$ad > bc$$
$$\Rightarrow |A| > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

لكن:
$c<0$ ، $b<0$
$d>0$ ، $a>0$

$\therefore$ لا يوجد عناصر سالبة في A^{-1}.

* الحالة الثانية:

$$ad < bc$$
$$\Rightarrow |A| < 0$$
$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{-b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

لكن:
$b<0$ ، $c<0$
$d>0$ ، $a>0$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{\text{موجب}}{\text{سالب}} & \frac{\text{موجب}}{\text{سالب}} \\ \frac{\text{موجب}}{\text{سالب}} & \frac{\text{موجب}}{\text{سالب}} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ جميع عناصر A^{-1} سالبة.

$\therefore$ نعم من الممكن أن تحتوي A^{-1} على عناصر سالبة.

24 مسألة مفتوحة: أكتب معادلة مصفوفية ليس لها حل وحيد.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

25 برهان: إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

وكانت: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

فأثبت أن $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$$

28 أكتشف المختلف: أي المصفوفات الآتية مختلفة ؟ أبرر إجابتي :

$\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3 & 3\\-1 & -1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$ مصفوفة غير منفردة

أما باقي المصفوفات جميعها منفردة.

27 تحدّ: إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\0 & 1\end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة B التي تحقق المعادلة :

$BA^2 = A$

$A^2 = \begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 15\\5 & 19\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}x & y\\z & w\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4 & 15\\5 & 19\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}4x+5y & 15x+19y\\4z+5w & 15z+19w\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\1 & 4\end{bmatrix}$

$(4x+5y=1)*-15$ ⇐
$(15x+19y=3)*4$

⇐

$\Rightarrow -60x-75y=-15$ .....(1)
$60x+76y=12$ ----(2)

$y=-3$

$\Rightarrow 4x+5(-3)=1$
$4x-15=1$
$4x=16$
$x=4$

$(4z+5w=1)*-15$ ----(1)

$(15z+19w=4)*4$ -----(2)

$-60z-75w=-15$ ----(1)
$60z+76w=16$

$w=1$

$\Rightarrow 4z+5(1)=1$
$4z=-4$
$z=-1$

$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}4 & -3\\-1 & 1\end{bmatrix}$

• فكر في طريقة أخرى ....

أسئلة كتاب التمارين

أبين إذا كانت كل مصفوفتين مما يأتي تمثل إحداهما نظيراً ضربياً للأخرى :

1) $A=\begin{bmatrix}8 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -5 & 8\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ و $BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$AB=BA=I$ ⇐

كل من المصفوفتين A و B هي نظير ضربي للأخرى .

2) $F=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -1 & 5\end{bmatrix}$, $G=\begin{bmatrix}0.25 & -0.25\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

$FG=\begin{bmatrix}-4.25 & 14.25\\ 4.75 & 15.25\end{bmatrix}$

$FG\neq I$ ⇐

كل من المصفوفتين A و B ليست نظيراً ضربياً للأخرى .

أبين إذا كانت كل من المصفوفات الآتية منفردة أو غير منفردة، ثم أجد النظير الضربي لغير المنفردة منها:

3) $M=\begin{bmatrix}4 & -10\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

$|M| = 20-20=0$

M منفردة. ⇐

4) $N=\begin{bmatrix}-3 & -11\\ 6 & 2\end{bmatrix}$

$|N| = 60$ غير منفردة

$N^{-1}=\frac{1}{60}\begin{bmatrix}2 & 11\\ -6 & -3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{1}{30} & \frac{11}{60}\\ \frac{-1}{10} & \frac{-1}{20}\end{bmatrix}$

5) $R=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$

$|R| = -17$ غير منفردة

$R^{-1}=\frac{-1}{17}\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

$R^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{17} & \frac{-4}{17}\\ \frac{-2}{17} & \frac{-3}{17}\end{bmatrix}$

أحل نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

6 $-2X + Y = 13$
$X - 2Y = -11$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}13\\ -11\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

⇐ المعادلة المصفوفية:

$$AX = B$$
$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix} = 3$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}13\\ -11\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-5\\ 3\end{bmatrix}$$

∴ الزوج المرتب : $(-5, 3)$

7 $4X + 5Y = 22$
$3X + 4Y = 17$

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}22\\ 17\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 1$$

⇐ المعادلة المصفوفية:

$$AX = B$$
$$X = A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -5\\ -3 & 4\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}4 & -5\\ -3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}22\\ 17\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$$

∴ الزوج المرتب : $(3, 2)$

8
$$3X - 8Y = 34$$
$$2Y - 4X - 28 = 0$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -8\\ -4 & 2\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}34\\ 28\end{bmatrix}$$

حيث أن المعادلتين:

$$3x - 8y = 34 \quad ----(1)$$
$$-4x + 2y = 28 \quad ----(2)$$

الآن:
المعادلة المصفوفية:

$$AX = B$$
$$X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow |A| = -26$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix}2 & 8\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{26} & \frac{-8}{26}\\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26}\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}\frac{-2}{26} & \frac{-8}{26}\\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}34\\ 28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-292}{26}\\ \frac{-220}{26}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{-146}{13}\\ \frac{-110}{13}\end{bmatrix}$$

∴ الزوج المرتب: $\left(\frac{-146}{13}, \frac{-110}{13}\right)$

9 أجد قيمة x التي تجعل المصفوفة:

$$\begin{bmatrix}X & 1\\ 15 & X+2\end{bmatrix}$$

منفردة؟

$$x(x+2) - 15 = 0$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0$$
$$\Rightarrow (x+5)(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{x=-5}\ ,\ \boxed{x=3}$$

∴ قيم x التي تجعل المصفوفة منفردة هي $\{-5, 3\}$

10 إذا كان: $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$، فأجد محددة A^{-1}، ثم أبين العلاقة بين $|A|$ و $|A^{-1}|$.

$$|A| = 2$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| = -\frac{2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

نلاحظ أن: كل من $|A|$ و $|A^{-1}|$ نظير ضربي للآخر.

11 إذا كان A و B مصفوفتين مربعتين من الرتبة 2X2 ، وكان : $AB = B^5A$ ، وكان : $B^6 = I$ حيث I المصفوفة المحايدة ، فأثبت أن:

$B(AB) = A$

معطى $B(AB) = B(B^5A)$

خاصية تجميعية $= (BB^5)A$

$= B^6A$

$= IA$ $(B^6 = I)$

$= A$

12 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ، وكان :

B مصفوفة مربعة من الرتبة 2X2 ، حيث : $BA^2 = A$ فأجد المصفوفة B.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow BA^2 = A$

$BA^2 \cdot A^{-2} = A \cdot A^{-2}$

$\Rightarrow B = A^{-1}$

$\Rightarrow |A| = 1$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

• فكر في طريقة أخرى .

13 إذا كانت: $B = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ، حيث : $a \neq \frac{-25}{6}$

، فأجد قيمة a التي تجعل $B = B^{-1}$.

$|B| = -25 - 6a$

$\Rightarrow B^{-1} = \frac{-1}{25+6a} \begin{bmatrix} 5 & -a \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{25+6a} & \frac{a}{25+6a} \\ \frac{6}{25+6a} & \frac{5}{25+6a} \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B = B^{-1}$

$\Rightarrow \frac{-5}{25+6a} = -5$

$25 + 6a = 1$

$6a = -24$

$\therefore \boxed{a = -4}$

14 تغذية: تخطط اختصاصية تغذية نظاماً غذائياً للاعب كرة قدم، بحيث يتيح له استهلاك 3600 سعرة حرارية يومياً ، بأن يأكل 750g من البروتينات والكربوهيدرات والدهون كل يوم. إذا كان الغرام الواحد لكل من البروتينات والكربوهيدرات يزود الجسم بنحو 4 سعرات، وكان الغرام الواحد من الدهون يزود الجسم بنحو 9 سعرات، وبلغت نسبة السعرات المقررة التي مصدرها البروتينات والدهون نحو 60% فأكتب معادلة مصفوفية، ثم أحلها لإيجاد مقدار ما يتناوله هذا اللاعب من البروتينات والكربوهيدرات والدهون يومياً.

نفرض أن :
كمية الغرامات من البروتين هي x .
كمية الغرامات من الكربوهيدرات هي y.
كمية الغرامات من الدهون هي z .

⇐ نكتب معادلة تمثل كمية الغرامات لكل من البروتينات والكربوهيدرات والدهون .

$$x+y+z=750 \quad ----(1)$$

⇐ نكتب معادلة تمثل عدد السعرات المأخوذة من كل عنصر غذائي :

$$4x+4y+9z=3600 \quad ---(2)$$

لكن :

$$4x+9z=3600 * (0.6)$$

$$\Rightarrow 4x+9z=2160$$

وعليه فإن :

$$4y=3600-2160$$

$$4y=1440$$

$$\boxed{y=360}$$

$$x+360+z=750 \quad \Leftarrow$$

$$x+z=390 \quad ----(1)$$

$$4x+9z=2160$$

⇐ المعادلة المصفوفية :

$$AX=B$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 9\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}390\\ 2160\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & 9\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=9-4=5$$

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}9 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{9}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5}\end{bmatrix}$$

تابع حل فرع (14) ....

$$B = \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 270 \\ 120 \end{bmatrix}$$

∴ ستتناول اللاعب :

270g بروتين .

360g كربوهيدرات .

120g دهون .

إجابات أسئلة
اختبار نهاية الوحدة

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}15 & -8 & 0\\ 9 & 22 & -4\\ -3 & 6 & 12\end{bmatrix}$، فإنّ $a_{11}+a_{22}$ يساوي:

a) 15 b) −12

c) 5 d) −2

2) إذا كانت $A_{3\times2}$، وكانت $B_{2\times4}$، وكانت $C_{3\times2}$، فإنّ العملية التي يُمكن إيجادها هي:

a) $A+B$ b) $B+C$

c) $5B-3C$ d) $(A+C)B$

3) إذا كانت: $\begin{bmatrix}4 & x\\ 7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y & 2\\ 4 & z\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & x-z\end{bmatrix}$، فإنّ قيمة $(x+y+z)$ تساوي:

a) 10 b) 19

c) 21 d) 27

4) إذا كانت: $\begin{bmatrix}-8 & x\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ مصفوفة مُفردة، فإنّ قيمة x تساوي:

a) −8 b) 12

c) 6 d) −26

5) إذا كانت: $C=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 6 & -3\\ 8 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 9 & -2 & -3\end{bmatrix}$، فإنّ قيمة العنصر c_{23} تساوي:

a) 39 b) 22

c) 25 d) 27

6) إذا كانت $L_{2\times4}$، وكانت $M_{4\times3}$، وكانت $N_{2\times3}$، فإنّ رتبة المصفوفة T، حيث: $T=NML$، هي:

a) 2×3 b) 3×5

c) 3×4 d) 2×4

إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}a-3 & -2\\ 2 & a+2\end{bmatrix}$، حيث a عدد ثابت، فأجب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

7) أجد مُحدِّدة A بدلالة a.

$$|A|=(a-3)(a+2)-(-4)$$
$$=a^2+2a-3a-6+4$$
$$=a^2-a-2$$

8) أجد قِيَم a التي تجعل المصفوفة A مُفردة.

$$|A|=a^2-a-2=0$$
$$=(a-2)(a+1)=0$$
$$a=2,-1$$

9) أجد A^{-1} عندما $a=3$.

* نكتب عناصر المصفوفة A عندما $a=3$ كالآتي:

$$A=\begin{bmatrix}3-3 & -2\\ 2 & 3+2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=0+4=4$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

اختبار نهاية الوحدة

إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}3 & 9\\ -4 & 1\\ 0 & 8\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ ، فأجد كلا مما يأتي (إن أمكن):

10 $C(B+D)$

$$B+D=\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 6 & -3\\ 4 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C(B+D)=\begin{bmatrix}3 & 9\\ -4 & 1\\ 0 & 8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}27 & -6 & -21\\ -23 & -18 & -11\\ 8 & -16 & -24\end{bmatrix}$$

11 AB

$$AB=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & -8 & -23\\ -3 & -7 & -4\end{bmatrix}$$

12 $B+C$

لا يمكن إيجادها لأن B و C لهما مرتبتان مختلفتان .

13 $2B-3C$

لا يمكن إيجادها لأن 2B و 3C لهما مرتبتان مختلفتان

14 أجد: $\begin{vmatrix}3 & -7 & 6\\ 1 & 0 & 8\\ -2 & 11 & 9\end{vmatrix}$.

$$\Rightarrow 3(0-88)-(-7)(9-(8)(-2))+6(11-0)$$

$$=3(-88)+7(25)+6(11)$$

$$=-23$$

15 يبيّن الجدول التالي توزيع سكّان إحدى البلدات (بالآلاف) حسب فئات العمر والجنس. أنظّم هذه البيانات في مصفوفة صفوفها فئات الأعمار، ثمّ أحدّد رتبتها.

العمر	الذكور	الإناث
0 – 19	71	66
20 – 39	68	59
40 – 59	32	22
60 فأكثر	11	14

ذكور إناث

$$A=\begin{bmatrix}71 & 66\\ 68 & 59\\ 32 & 22\\ 11 & 14\end{bmatrix}\begin{matrix}0-19\\ 20-39\\ 40-59\\ 60\text{ فأكثر}\end{matrix}$$

$\therefore$ مرتبتها $A_{4\times 2}$

اختبار نهاية الوحدة

16 إذا كانت: $A=\begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة x التي تجعل $AB=BA$

$$AB=\begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix} 2x+12 & 3x+6 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2x+12 & 21 \\ 2x+4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=BA$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 2x+12 & 3x+6 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x+12 & 21 \\ 2x+4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3x+6=21$$

$$3x=15$$

$$\boxed{x=5}$$

17 إذا كانت: $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت k، والثابت h اللذين يجعلان $A^2+kI=hA$.

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 & 16 \\ 56 & 39 \end{bmatrix}$$

$$kI=k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$hA=h\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3h & 2h \\ 7h & 5h \end{bmatrix}$$

$$A^2+kI=\begin{bmatrix} 25 & 16 \\ 56 & 39 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 25+k & 16 \\ 56 & 39+k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 25+k & 16 \\ 56 & 39+k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3h & 2h \\ 7h & 5h \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2h=16$$

$$\boxed{h=8}$$

$$\Rightarrow 25+k=3(8)$$

$$25+k=24$$

$$\boxed{k=-1}$$

اختبار نهاية الوحدة

١٨ إذا كانت: $A=[2\ \ -2], B=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & -2\\4 & -1\end{bmatrix}$
فأجد $BA-2C^2$.

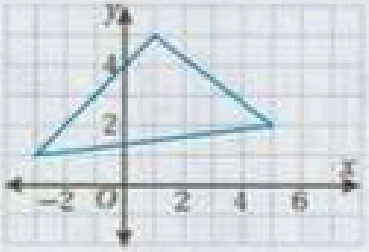
$$BA=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}6 & -6\\4 & -4\end{bmatrix}$$
$$C^2=\begin{bmatrix}1 & -2\\4 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -2\\4 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-7 & 0\\0 & -7\end{bmatrix}$$
$$2C^2=\begin{bmatrix}-14 & 0\\0 & -14\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow BA-2C^2=\begin{bmatrix}6 & -6\\4 & -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-14 & 0\\0 & -14\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}20 & -6\\18 & 10\end{bmatrix}$$

١٩ أحلُّ المعادلة: $2X-\begin{bmatrix}5 & -3\\6 & 3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}-1 & 7\\2 & 5\end{bmatrix}$

$$2X=3\begin{bmatrix}-1 & 7\\2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -3\\6 & 3\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow 2X=\begin{bmatrix}-3 & 21\\6 & 15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -3\\6 & 3\end{bmatrix}$$
$$2X=\begin{bmatrix}2 & 18\\12 & 18\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 18\\12 & 18\end{bmatrix}$$
$$\therefore X=\begin{bmatrix}1 & 9\\6 & 9\end{bmatrix}$$

اختبار نهاية الوحدة

20 أجد مساحة المثلث الآتي باستعمال المحددات.



رؤوس المثلث :

$(-3,1),(1,5),(5,2)$

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$|A| = -28$

$Area = \frac{1}{2}|A|$

$Area = \frac{1}{2}|-28|$

$= \frac{1}{2} * 28$

$= 14$ وحدة مربعة

21 أحلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كريمر:

$$3x - 2y = 8$$
$$5x + 3y = 13$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}}{D}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 19$$

$$\therefore x = \frac{50}{19} \quad , \quad y = \frac{-1}{19}$$

اختبار نهاية الوحدة

22 أحلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي:

$$x - 5y = 14$$
$$3x - 8y = 28$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

⇐ المعادلة المصفوفية:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow |A| = 7$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

∴ الحل هو: $(4, -2)$

23 إذا كانت: $B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$، حيث a عدد ثابت لا يساوي 2، وكان: $B + B^{-1} = I$، فأجد قيمة a.

$$|B| = a - 2$$

$$B^{-1} = \frac{1}{a-2}\begin{bmatrix} -1 & -a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B + B^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{-1}{a-2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(a-2) - 1}{a-2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2a - 4 - 1}{a-2} = 1$$

$$2a - 5 = a - 2$$

$$\boxed{a = 3}$$

اختبار نهاية الوحدة

24 كيمياء: لدى عائشة 3 محاليل حمضية، تركيز الحمض في الأوّل 10%، وتركيزه في الثاني 20%، وتركيزه في الثالث 40%. أكتب معادلة مصفوفية تُمثّل المسألة، ثمّ أحلّها لإيجاد الكميات التي يتعيّن على عائشة مزجها من المحاليل الثلاثة للحصول على 100 mL من محلول حمضي نسبة تركيزه 18%، علمًا بأنّ الكمية التي ستُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 10% تساوي أربعة أمثال ما سيُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 40%.

نفرض أنّ :

- حجم المحلول الذي تركيز الحمض فيه 10% هو x .
- حجم المحلول الذي تركيز الحمض فيه 20% هو y .
- حجم المحلول الذي تركيز الحمض فيه 40% هو z .

$$\Rightarrow x+y+z=100$$
$$0.1x+0.2y+0.4z=18$$

لكن :-

$$x=4z$$

$$\Rightarrow 4z+y+z=100$$
$$0.1(4z)+0.2y+0.4z=18$$

$$\therefore y+5z=100 \quad \text{---(1)}$$
$$0.2y+0.8z=18 \quad \text{---(2)}$$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}100\\ 18\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}$$

المعادلة المصفوفية :

$$AX=B$$
$$X=A^{-1}B$$
$$\Rightarrow |A|=-0.2$$
$$\Rightarrow A^{-1}=-5\begin{bmatrix}0.8 & -5\\ -0.2 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-4 & 25\\ 1 & -5\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-4 & 25\\ 1 & -5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}100\\ 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}50\\ 10\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=50}\ ,\ \boxed{z=10}$$

$$\Rightarrow X=4z$$
$$X=4*10$$
$$\boxed{X=40}$$

∴ ستخرج عائشة :

- 40L من المحلول تركيز الحمض فيه 10% .
- 50L من المحلول تركيز الحمض فيه 20% .
- 10L من المحلول تركيز الحمض فيه 40% .