إجابات أسئلة
اختبار نهاية الوحدة

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}15 & -8 & 0\\ 9 & 22 & -4\\ -3 & 6 & 12\end{bmatrix}$، فإنَّ $a_{21}+a_{32}$ يساوي:

a) 15 b) -12

c) 5 d) -2

2 إذا كانت $A_{3\times2}$، وكانت $B_{2\times4}$، وكانت $C_{3\times2}$، فإنَّ العملية التي يُمكِن إيجادها هي:

a) $A+B$ b) $B+C$

c) $5B-3C$ d) $(A+C)B$

3 إذا كانت: $\begin{bmatrix}4 & x\\ 7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y & 2\\ 4 & z\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & x-z\end{bmatrix}$، فإنَّ قيمة $(x+y+z)$ تساوي:

a) 10 b) 19

c) 21 d) 27

4 إذا كانت: $\begin{bmatrix}-8 & x\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ مصفوفة مُنفرِدة، فإنَّ قيمة x تساوي:

a) -8 b) 12

c) 6 d) -26

5 إذا كانت: $\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 9 & -2 & -3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 6 & -3\\ 8 & 5\end{bmatrix}=C$، فإنَّ قيمة العنصر c_{23} تساوي:

a) 39 b) 22

c) 25 d) 27

6 إذا كانت $L_{3\times4}$، وكانت $M_{5\times3}$، وكانت $N_{2\times5}$، فإنَّ رتبة المصفوفة T، حيث: $T=NML$، هي:

a) 2×3 b) 3×5

c) 3×4 d) 2×4

إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}a-3 & -2\\ 2 & a+2\end{bmatrix}$، حيث a عدد ثابت، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

7 أجد مُحدِّدة A بدلالة a.

$$|A|=(a-3)(a+2)-(-4)$$
$$=a^2+2a-3a-6+4$$
$$=a^2-a-2$$

8 أجد قِيَم a التي تجعل المصفوفة A مُنفرِدة.

$$|A|=a^2-a-2=0$$
$$=(a-2)(a+1)=0$$
$$a=2,-1$$

9 أجد A^{-1} عندما $a=3$.

* نكتب عناصر المصفوفة A عندما a=3 كالآتي:

$$A=\begin{bmatrix}3-3 & -2\\ 2 & 3+2\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|=0+4=4$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

اختبار نهاية الوحدة

إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}3 & 9\\ -4 & 1\\ 0 & 8\end{bmatrix}$ ، $D=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$ ، فأجد كُلًّا مما يأتي (إنْ أمكن):

10 $C(B+D)$

$$B+D=\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 6 & -3\\ 4 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C(B+D)=\begin{bmatrix}3 & 9\\ -4 & 1\\ 0 & 8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}27 & -6 & -21\\ -23 & -18 & -11\\ 8 & -16 & -24\end{bmatrix}$$

11 AB

$$AB=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & -8 & -23\\ -3 & -7 & -4\end{bmatrix}$$

12 $B+C$

لا يمكن إيجادها لأن B و C لهما رتبتان مختلفتان .

13 $2B-3C$

لا يمكن إيجادها لأن 2B و 3C لهما رتبتان مختلفتان

14 أجد: $\begin{vmatrix}3 & -7 & 6\\ 1 & 0 & 8\\ -2 & 11 & 9\end{vmatrix}$.

$$\Rightarrow 3(0-88)-(-7)(9-(8)(-2))+6(11-0)$$

$$=3(-88)+7(25)+6(11)$$

$$=-23$$

15 يُبيِّن الجدول التالي توزيع سُكّان إحدى البلدات (بالآلاف) بحسب فئات العمر والجنس. أُنظِّم هذه البيانات في مصفوفة صفوفها فئات الأعمار، ثمَّ أُحدِّد رتبتها.

العمر	الذكور	الإناث
0 – 19	71	66
20 – 39	68	59
40 – 59	32	22
60 فأكثر	11	14

ذكور — اناث

$$A=\begin{bmatrix}71 & 66 & 0-19\\ 68 & 59 & 20-39\\ 32 & 22 & 40-59\\ 11 & 14 & 60\text{ فأكثر}\end{bmatrix}$$

$\therefore$ رتبتها $A_{4\times2}$

اختبار نهاية الوحدة

16 إذا كانت: $A=\begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة x التي تجعل $AB=BA$.

$$AB=\begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=\begin{bmatrix} 2x+12 & 3x+6 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2x+12 & 21 \\ 2x+4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow AB=BA$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 2x+12 & 3x+6 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x+12 & 21 \\ 2x+4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3x+6=21$$

$$3x=15$$

$$\boxed{x=5}$$

17 إذا كانت: $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت k، والثابت h اللذين يجعلان $A^2+kI=hA$.

$$A^2=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 & 16 \\ 56 & 39 \end{bmatrix}$$

$$kI=k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$hA=h\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3h & 2h \\ 7h & 5h \end{bmatrix}$$

$$A^2+kI=\begin{bmatrix} 25 & 16 \\ 56 & 39 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 25+k & 16 \\ 56 & 39+k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 25+k & 16 \\ 56 & 39+k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3h & 2h \\ 7h & 5h \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2h=16$$

$$\boxed{h=8}$$

$$\Rightarrow 25+k=3(8)$$

$$25+k=24$$

$$\boxed{k=-1}$$

اختبار نهاية الوحدة

18 إذا كانت: $A=[2\ \ -2], B=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & -2\\4 & -1\end{bmatrix}$،
فأجد $BA-2C^2$.

$$BA=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}6 & -6\\4 & -4\end{bmatrix}$$

$$C^2=\begin{bmatrix}1 & -2\\4 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & -2\\4 & -1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-7 & 0\\0 & -7\end{bmatrix}$$

$$2C^2=\begin{bmatrix}-14 & 0\\0 & -14\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow BA-2C^2=\begin{bmatrix}6 & -6\\4 & -4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-14 & 0\\0 & -14\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}20 & -6\\18 & 10\end{bmatrix}$$

19 أحُلُّ المعادلة: $2X-\begin{bmatrix}5 & -3\\6 & 3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}-1 & 7\\2 & 5\end{bmatrix}$.

$$2X=3\begin{bmatrix}-1 & 7\\2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -3\\6 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2X=\begin{bmatrix}-3 & 21\\6 & 15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & -3\\6 & 3\end{bmatrix}$$

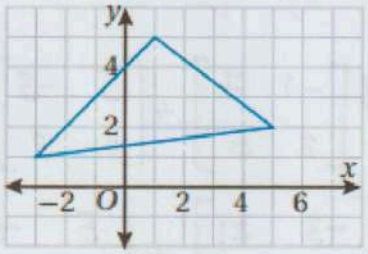
$$2X=\begin{bmatrix}2 & 18\\12 & 18\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 18\\12 & 18\end{bmatrix}$$

$$\therefore X=\begin{bmatrix}1 & 9\\6 & 9\end{bmatrix}$$

اختبار نهاية الوحدة

20 أجد مساحة المُثلَّث الآتي باستعمال المُحدِّدات.



رؤوس المثلث :

$(-3,1),(1,5),(5,2)$

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$|A| = -28$

$Area = \frac{1}{2}|A|$

$Area = \frac{1}{2}|-28|$

$= \frac{1}{2} * 28$

$= 14$ وحدة مربعة

21 أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كريمر:

$$3x - 2y = 8$$
$$5x + 3y = 13$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix}8 & -2\\ 13 & 3\end{vmatrix}}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}3 & 8\\ 5 & 13\end{vmatrix}}{D}$$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix} = 19$$

$$\therefore x = \frac{50}{19} \quad , \quad y = \frac{-1}{19}$$

اختبار نهاية الوحدة

22 أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي:

$$x - 5y = 14$$
$$3x - 8y = 28$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

المعادلة المصفوفية: $\Leftarrow$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow |A| = 7$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ الحل هو: $(4, -2)$

23 إذا كانت: $B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$، حيث a عدد ثابت لا يساوي 2، وكان: $B + B^{-1} = I$، فأجد قيمة a.

$$|B| = a - 2$$

$$B^{-1} = \frac{1}{a-2}\begin{bmatrix} -1 & -a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B + B^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{-1}{a-2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2(a-2) - 1}{a-2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2a - 4 - 1}{a-2} = 1$$

$$2a - 5 = a - 2$$

$$\boxed{a = 3}$$

اختبار نهاية الوحدة

24 كيمياء: لدى عائشة 3 محاليل حمضية، تركيز الحمض في الأوّل 10%، وتركيزه في الثاني 20%، وتركيزه في الثالث 40%. أكتب معادلة مصفوفية تُمثّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها لإيجاد الكميات التي يتعيَّن على عائشة مزجها من المحاليل الثلاثة للحصول على 100 mL من محلول حمضي نسبة تركيزه 18%، علمًا بأنَّ الكمية التي ستُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 10% تساوي أربعة أمثال ما سيُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 40%.

نفرض أن :

- حجم المحلول الذي تركيز الحمض فيه 10% . x
- حجم المحلول الذي تركيز الحمض فيه 20% . y
- حجم المحلول الذي تركيز الحمض فيه 40% . z

$\Rightarrow x+y+z=100$

$0.1x+0.2y+0.4z=18$

نكون :-

$x=4z$

$\Rightarrow 4z+y+z=100$

$0.1(4z)+0.2y+0.4z=18$

$\therefore y+5z=100 \quad ---(1)$

$0.2y+0.8z=18 \quad ---(2)$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0.2 & 0.8\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}100\\ 18\end{bmatrix}$

$X=\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}$

المعادلة المصفوفية :

$AX=B$

$X=A^{-1}B$

$\Rightarrow |A|=-0.2$

$\Rightarrow A^{-1}=-5\begin{bmatrix}0.8 & -5\\ -0.2 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-4 & 25\\ 1 & -5\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-4 & 25\\ 1 & -5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}100\\ 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}50\\ 10\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{y=50}\ , \boxed{z=10}$

$\Rightarrow X=4z$

$X=4*10$

$\boxed{X=40}$

∴ ستخرج عائشة :

- 40L من المحلول تركيز الحمض فيه 10% .
- 50L من المحلول تركيز الحمض فيه 20% .
- 10L من المحلول تركيز الحمض فيه 40% .