أكاديمية و مدارس أجيال العلم
Science Generations Academy

أكاديمية و مدارس أجيال العلم

## الرياضيات المتقدم

# الوحدة الثالثة

# التفاضل وتطبيقاته

### الدروس الثلاث الأولى


**إعداد المعلم:**

**أ.أحمد محمد البشايرة**

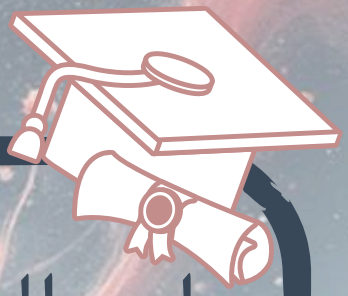
**0799819016**


توجيهي 2008

دفعة الطليعة

أكاديمية ومدارس أجيال العلم

أكاديمية ومدارس أجيال العلم
Science Generations Academy



اسم الطالب/ـة: .....

الصف والشعبة: .....

اسم المدرسة: .....

# الـــفـــهـــرس

## الدرس الأول
## مشتقة اقترانات خاصة

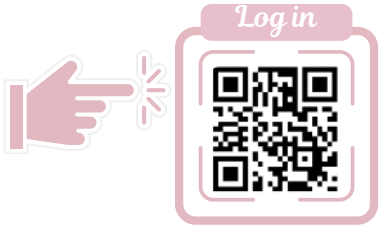

| الموضوع | رقم الصفحة |
|---|---|
| مقدمة الدرس + أتحقق من فهمي | 4 - 12 |
| أتدرب وأحل المسائل | 12 - 15 |
| مهارات التفكير العليا | 15 - 17 |
| أسئلة كتاب التمارين | 18 - 19 |

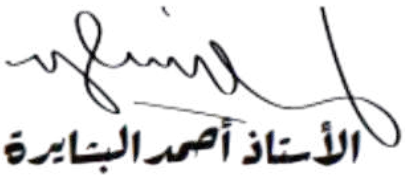

## الدرس الثاني
## مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا


| الموضوع | رقم الصفحة |
|---|---|
| مقدمة الدرس + أتحقق من فهمي | 20 - 26 |
| أتدرب وأحل المسائل | 27 - 33 |
| مهارات التفكير العليا | 33 - 35 |
| أسئلة كتاب التمارين | 35 - 38 |


## الدرس الثالث
## قاعدة السلسلة


| الموضوع | رقم الصفحة |
|---|---|
| مقدمة الدرس + أتحقق من فهمي | 39 - 50 |
| أتدرب وأحل المسائل | 50 - 58 |
| مهارات التفكير العليا | 59 - 62 |
| أسئلة كتاب التمارين | 63 - 69 |



الدرس الأول

# مشتقة اقترانات خاصة

# Differentiation of Special Functions

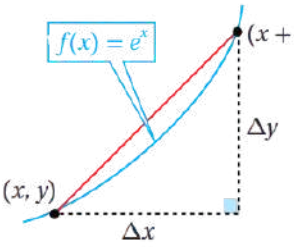
## مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الثابت ومشتقة اقتران القوَّة باستعمال قواعد خاصة.
وسأتعلَّم الآن إيجاد مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، ومشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام.

أفترض أنَّ $(x, y)$ و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقطتان، كلٌّ منهما قريبة من الأُخرى، وأنَّهما تقعان على منحنى الاقتران: $f(x) = e^x$.

إذن، الفرق بين الإحداثي $y$ للنقطتين هو:

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x$$




ومنه، فإنَّ ميل القاطع المارِّ بالنقطتين $(x, y)$ و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ هو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

إذن، ميل المماس عند النقطة $(x, y)$ هو:

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

ولكنْ، ما قيمة: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ ؟

يُمكِن الاستعانة بجدول القِيَم الآتي لإيجاد قيمة: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

| $\Delta x$ | $-0.1$ | $-0.01$ | $-0.001$ | | $0.001$ | $0.01$ | $0.1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ | $0.9516$ | $0.9950$ | $0.9995$ | $\to 0 \leftarrow$ | $1.0005$ | $1.0050$ | $1.0517$ |

$\to 1 \leftarrow$

أُلاحِظ من الجدول السابق أنَّ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$.

إذن، ميل المماس عند النقطة $(x, y)$ هو:

$$m = f'(x) = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$$

وهذا يعني أنَّ ميل المماس عند أيِّ نقطة تقع على منحنى الاقتران الأُسّي الطبيعي هو الإحداثي $y$ لهذه النقطة.

**نظرية** — مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي

إذا كان: $f(x) = e^x$، حيث $e$ العدد النيبيري، فإنَّ:

$$f'(x) = e^x$$

**أتذكَّر**

يُسمّى العدد $e$ الأساس الطبيعي، أو العدد النيبيري؛ وهو عدد غير نسبي، ويُسمّى الاقتران: $f(x) = e^x$ الاقتران الأُسّي الطبيعي.

**أتذكَّر**

ميل المماس عند نقطة ما يساوي مشتقة الاقتران عند هذه النقطة.

**تنبيه**

لا تُعَدُّ الإجراءات التي سبقت النظرية برهانًا عليها، وإنَّما تُمهِّد للنظرية، وتُقدِّم تصوُّرًا لها.

**مثال 1**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

**1** $f(x) = 3e^x$

$f(x) = 3e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 3e^x$ قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي

**أتذكّر**

- $(af(x))' = af'(x)$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

**2** $f(x) = x^2 + e^x$

$f(x) = x^2 + e^x$ الاقتران المعطى

$f'(x) = 2x + e^x$ قواعد مشتقات اقتران القوّة، والمجموع، والاقتران الأُسّي الطبيعي

**3** $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

$y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} - \dfrac{2xe^x}{x}$ بتوزيع المقام على البسط

$= \dfrac{x^{1/3}}{x} - \dfrac{2xe^x}{x}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسّية

$= x^{-2/3} - 2e^x$ بالتبسيط

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{3}x^{-5/3} - 2e^x$ قواعد مشتقات اقتران القوّة، والاقتران الأُسّي الطبيعي، ومضاعفات الاقتران

$= -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x$ تعريف الأُسّ السالب، والصورة الجذرية

## أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

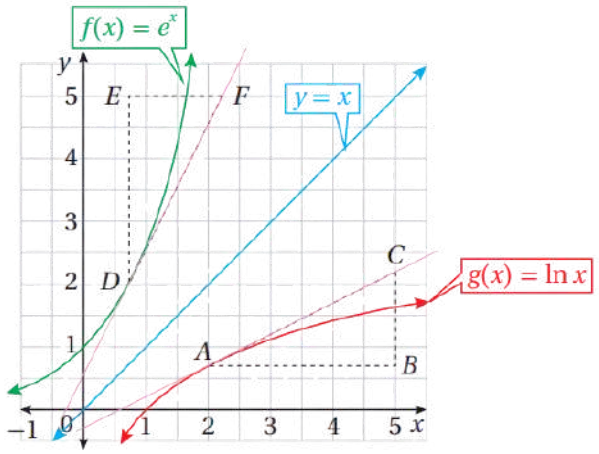
a) $f(x) = 5e^x + 3$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 4e^x$

c) $y = 8e^x + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

## مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

يُبيِّن الشكل الآتي منحنيي الاقترانين: $f(x) = e^x$، و$g(x) = \ln x$.




أُلاحِظ من التمثيل البياني أنَّ ميل المماس عند النقطة $A$، الواقعة على منحنى الاقتران: $g(x) = \ln x$، هو: $\frac{CB}{AB}$. إذن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB}$$

بما أنَّ المثلث $DEF$ هو انعكاس للمثلث $ABC$ حول المستقيم: $y = x$، فإنَّهما متطابقان؛ لذا فإنَّ:

$$\frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE}$$

وبما أنَّ $\frac{DE}{FE}$ هو ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x$ عند النقطة $D$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}}$$

وبما أنَّ ميل المماس عند أيِّ نقطة تقع على منحنى الاقتران الأُسِّي الطبيعي هو الإحداثي $y$ لهذه النقطة، فهذا يعني أنَّ ميل المماس عند النقطة $D$ هو الإحداثي $y$ للنقطة $D$. وبسبب الانعكاس؛ فإنَّ الإحداثي $y$ للنقطة $D$ هو الإحداثي $x$ للنقطة $A$. وبذلك، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AB} = \frac{FE}{DE} = \frac{1}{\frac{DE}{FE}} = \frac{1}{x}$$

**نظرية** مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

إذا كان: $f(x) = \ln x$، حيث: $x > 0$، فإنَّ:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

يُمكِن إثبات هذه النظرية لاحقًا باستعمال الاشتقاق الضمني الوارد في الدرس الرابع من هذه الوحدة.

**أتذكَّر**
الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي: $y = \ln x$ هو الاقتران العكسي للاقتران الأُسِّي الطبيعي: $y = e^x$.

**أتذكَّر**
مجال الاقتران $\ln x$ هو $(0, \infty)$.

**أتذكَّر**
الانعكاس هو تحويل هندسي ينقل الشكل من إحدى جهتي محور الانعكاس إلى الجهة الأخرى على البُعد نفسه من محور الانعكاس، من دون تغيير أبعاد الشكل أو تدويره. بوجه عام، فإنَّ الاقتران $f$ والاقتران العكسي له متماثلان حول المحور $y = x$.

تعلَّمْتُ سابقًا قوانين الضرب والقسمة والقوَّة للوغاريتمات، ويُمكِنني استعمال هذه القوانين مع النظرية السابقة لإيجاد مشتقة اقتران يحوي اللوغاريتم الطبيعي.

**مراجعة المفهوم** قوانين اللوغاريتمات

إذا كانت $b, x, y$ أعدادًا حقيقيةً موجبةً، وكان $p$ عددًا حقيقيًّا، حيث: $b \neq 1$، فإنَّ:

- قانون الضرب: $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
- قانون القسمة: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
- قانون القوَّة: $\log_b x^p = p \log_b x$

**أفكِّر**
لماذا يُشترَط أنَّ $b \neq 1$؟

**مثال 2**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

**1** $f(x) = \ln(x^4)$

$f(x) = \ln(x^4)$ — الاقتران المعطى

$= 4 \ln x$ — قانون القوَّة في اللوغاريتمات

$f'(x) = \frac{4}{x}$ — قاعدتا مشتقة مضاعفات الاقتران، ومشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

**2** $f(x) = \ln(xe^x) + \ln(7x)$

$f(x) = \ln(xe^x) + \ln(7x)$ — الاقتران المعطى

$= \ln x + \ln e^x + \ln 7 + \ln x$ — قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= 2 \ln x + x + \ln 7$ — بالتبسيط، واستعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$f'(x) = \frac{2}{x} + 1$ — قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، واقتران القوَّة، والثابت

**أتذكَّر**
اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$ هو لوغاريتم أساسه العدد الطبيعي $e$، ومن المُمكِن كتابته في صورة: $\log_e x$.

**أتذكَّر**
- $\ln e = 1$
- $\ln e^p = p$
- إذا كان: $b \neq 1$، حيث: $b > 0$، فإنَّ: $\log_b b^x = x$.

### أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

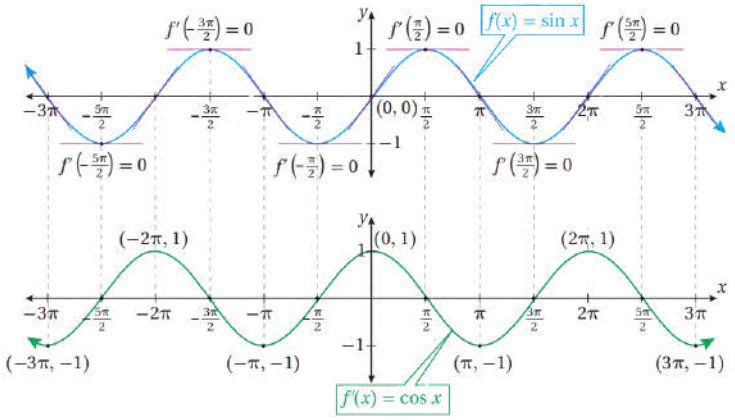
a) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(4x)$

b) $f(x) = \ln(2x^3)$

### مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات المثلثية هي قواعد معطاة باستعمال النسب المثلثية. وسأتعلَّم الآن إيجاد مشتقة كلٍّ من اقتران الجيب، واقتران جيب التمام.

يُبيِّن الشكل الآتي كُلًّا من التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = \sin x$، حيث $x$ قياس الزاوية بالراديان، والتمثيل البياني لمنحنى $f'(x)$ الذي رُسِم باستعمال ميل المماس لمنحنى $f(x)$.




يظهر من الشكل السابق أنَّ منحنى $f'(x)$ مُطابِق تمامًا لمنحنى جيب التمام؛ ما يعني أنَّ: $f'(x) = \cos x$. ويُمكِن بطريقة مُشابِهة استنتاج أنَّ مشتقة اقتران جيب التمام هي انعكاس منحنى اقتران الجيب حول المحور $x$.

**نظرية** مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

- إذا كان: $f(x) = \sin x$، فإنَّ: $f'(x) = \cos x$.
- إذا كان: $f(x) = \cos x$، فإنَّ: $f'(x) = -\sin x$.

**مثال 3**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

**1** $f(x) = 3\sin x + 4$

$f(x) = 3\sin x + 4$

الاقتران المعطى

$f'(x) = 3\cos x$

قواعد مشتقات اقتران الجيب، ومضاعفات الاقتران، والثابت، والمجموع

**2** $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$

$y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$

الاقتران المعطى

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x + 7\sin x$

قواعد مشتقات الاقتران الأُسّي الطبيعي، ومضاعفات الاقتران، واقتران جيب التمام، والمجموع

### أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$

b) $f(x) = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$

### تطبيقات: معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما

يُمكِن استعمال أيٍّ من قواعد الاشـتقاق التي تعلَّمْتُها في هذا الدرس لإيجاد معادلة المماس عند نقطة ما على منحنى الاقتران.

**مثال 4**

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$.

**الخطوة 1:** أجد ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$.

| | |
|---|---|
| الاقتران المعطى | $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ |
| قانون القسمة في اللوغاريتمات | $= \ln x - \ln e$ |
| الخصائص الأساسية في اللوغاريتمات | $= \ln x - 1$ |
| قواعد مشتقات الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والثابت، والفرق | $f'(x) = \frac{1}{x}$ |
| بتعويض $x = 1$ | $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ |

إذن، ميل المماس هو 1

**أتذكَّر**

إذا كان: $b \neq 1$،
حيث: $b > 0$، فإنَّ:
$\log_b b = 1$.

**الخطوة 2:** أجد معادلة المماس.

| | |
|---|---|
| معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة | $y - y_1 = m(x - x_1)$ |
| بتعويض $x_1 = 1, y_1 = -1, m = 1$ | $y - (-1) = 1(x - 1)$ |
| بالتبسيط | $y = x - 2$ |

إذن، معادلة المماس هي: $y = x - 2$.

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$.

بما أنَّ ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$ هو 1، فإنَّ ميل العمودي على المماس هو $-1$
ومنه، فإنَّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$ هي:

$$y - (-1) = -1(x - 1)$$
$$y = -x$$

**أتذكَّر**

إذا تعامد مستقيمان، كلٌّ منهما ليس رأسيًّا، فإنَّ حاصل ضرب ميليهما هو $-1$؛ أيْ إنَّ ميل أحدهما يساوي سالب مقلوب ميل الآخر.

**أتحقَّق من فهمي**

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln \sqrt{x}$، فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

a) معادلة المماس عند النقطة $\left(e, \frac{1}{2}\right)$.

b) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $\left(e, \frac{1}{2}\right)$.

**تطبيقات: الحركة في مسار مستقيم**

عند دراسة جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، أفترض أنَّ الجسم يتحرَّك على خطٍّ أعداد انطلاقًا من موقع ابتدائي، وأنَّ اتجاه حركته يكون موجبًا أو سالبًا، وأنَّ **موقع** (position) هذا الجسم بالنسبة إلى نقطة الأصل يُمثِّل اقترانًا بالنسبة إلى الزمن $t$، ويُرمَز إليه بالرمز $s(t)$.

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر اقتران الموقع $s(t)$ بالنسبة إلى الزمن اسم **السرعة المتجهة** (velocity) للجسم، ويُرمَز إليه بالرمز $v(t)$. وقد سُمِّي بهذا الاسم لأنَّه يُستعمَل لتحديد كلٍّ من مقدار سرعة الجسم، واتجاه حركته.

فإذا كانت قيمة $v(t) > 0$، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه الموجب. وإذا كانت قيمة $v(t) < 0$، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب. وإذا كانت $v(t) = 0$، فإنَّ الجسم يكون في حالة سكون.

يُطلَق على مُعدَّل تغيُّر السرعة المتجهة بالنسبة إلى الزمن اسم **التسارع** (acceleration)، ويُرمَز إليه بالرمز $a(t)$. أمّا القيمة المُطلَقة للسرعة المتجهة فتُسمّى **السرعة القياسية** (speed)، وهي تُحدِّد مقدارًا، ولا تُحدِّد اتجاه الحركة.

**مفهوم أساسي** الحركة في مسار مستقيم

إذا مثَّل الاقتران $s(t)$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، فإنَّ سرعته المتجهة $v(t)$ تعطى بالعلاقة: $v(t) = s'(t)$، وتسارعه $a(t)$ يعطى بالعلاقة: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.
أمّا سرعته القياسية فهي $|v(t)|$.

**أتذكَّر**

يأخذ موقع الجسم $s(t)$ قِيَمًا موجبةً، أو قِيَمًا سالبةً، أو صفرًا.

**أتعلَّم**

المسافة كمية قياسية (ليست متجهة)، والموقع كمية متجهة.

**أتعلَّم**

تُسمّى النقطة 0 على خطِّ الأعداد نقطة الأصل.

**مثال 5**

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 6t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و$t$ الزمن بالثواني:

1 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 2$.

**سرعة الجسم:**

أجد مشتقة اقتران الموقع، ثمَّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقة:

اقتران السرعة $v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$

بتعويض $t = 2$ $v(2) = 12(2) - 3(2)^2$

بالتبسيط $= 12$

**تسارع الجسم:**

أجد مشتقة اقتران السرعة، ثمَّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقة:

اقتران التسارع $a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - 6t$

بتعويض $t = 2$ $= 12 - 6(2)$

بالتبسيط $= 0$

سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي $12\ \text{m/s}$، وتسارعه هو $0\ \text{m/s}^2$

2 أجد قِيَم $t$ التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أيْ عندما $v(t) = 0$:

بمساواة اقتران السرعة بالصفر $12t - 3t^2 = 0$

بإخراج $3t$ عاملًا مشتركًا $3t(4 - t) = 0$

بحلِّ كل معادلة لـ $t$ $t = 0$ or $t = 4$

إذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 0$، و$t = 4$.

3 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟

اقتران السرعة $v(t) = 12t - 3t^2$

بتعويض $t = 5$ $v(5) = 12(5) - 3(5)^2$

بالتبسيط $= -15$

بما أنَّ إشارة السرعة سالبة، فإنَّ الجسم يتحرَّك في الاتجاه السالب عندما $t = 5$.

4 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أوَّل مَرَّة عندما $t = 0$. ومنه، فإنَّ $s(0) = 0$.

لإيجاد الأوقات التي يعود فيها الجسم إلى هذه النقطة، أحُلُّ المعادلة: $s(t) = 0$:

بمساواة اقتران الموقع بالصفر $6t^2 - t^3 = 0$

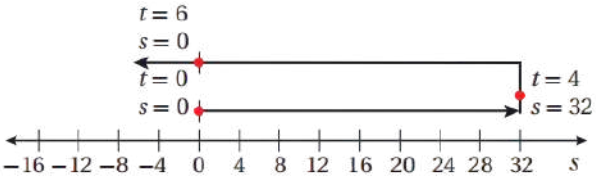
بإخراج $t^2$ عاملًا مشتركًا $t^2(6 - t) = 0$

بحلِّ كل معادلة لـ $t$ $t = 0$ or $t = 6$

إذن، يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد 6 s

**الدعم البياني:**

يُبيِّن المُخطَّط الآتي اتجاهات حركة الجسم في المسار المستقيم.




**إرشاد**

تشير كلمة (السرعة) إلى السرعة المتجهة أينما ورد ذكرها في الكتاب.

**أُفكِّر**

ما معنى أنْ يكون التسارع في لحظة ما مُساوِيًا للصفر؟

**أتعلَّم**

أُلاحِظ أنَّ سرعة الجسم سالبة عندما $t = 5$، وأنَّ موقعه عند اللحظة نفسها موجب $(s(5) = 25)$؛ ما يعني عدم وجود علاقة بين موقع الجسم واتجاه حركته.

**أتذكَّر**

يدلُّ الرمز $s(0)$ على الموقع الابتدائي لجسم يتحرَّك في مسار مستقيم، في حين تدلُّ العبارة $s = 0$ على أنَّ موقع الجسم هو نقطة الأصل.

**أتحقَّق من فهمي**

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و$t$ الزمن بالثواني:

a) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 4$.

b) أجد قِيَم $t$ التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

c) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

### تطبيقات: الحركة التوافقية البسيطة

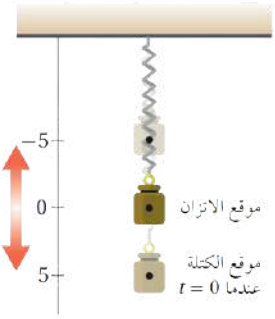
تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات الجيبية تُستعمَل لنمذجة السلوك الدوري في كثير من المواقف الحياتية والعلمية، مثل حركة اهتزاز كتلة مُعلَّقة بزنبرك؛ إذ يُمكِن إيجاد سرعة هذه الكتلة وتسارعها باستعمال المشتقات.

**أتذكَّر**

إذا كانت المعادلة التي تَصِف الإزاحة $y$ لجسم عند الزمن $t$ هي: $y = a \sin \omega t$، أو: $y = a \cos \omega t$، فإنَّ الجسم يكون في حركة توافقية بسيطة.

### مثال 6 : من الحياة

**زنبرك:** يُبيِّن الشكل المجاور جسمًا مُعلَّقًا بزنبرك، شُدَّ 5 وحدات أسفل موقع الاتزان ($s = 0$)، ثمَّ تُرِك عند الزمن $t = 0$ لتتحرَّك إلى الأعلى وإلى الأسفل. ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 5 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث $t$ الزمن بالثواني، و$s$ الموقع بالسنتيمترات:




1 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

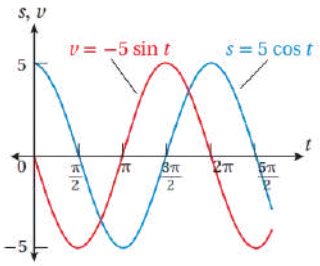
اقتران السرعة: $v(t) = s'(t) = -5 \sin t$

اقتران التسارع: $a(t) = v'(t) = -5 \cos t$

2 أَصِف حركة الجسم.

- اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران الموقع، فإنَّ الجسم يتحرَّك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$ على المحور $s$، والقيمة السالبة تعني أنَّ الجسم فوق موقع الاتزان.
- أُلاحِظ أنَّ قيمة السرعة القياسية تكون أكبر ما يُمكِن في كلٍّ من الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما $|\sin t| = 1$. وفي هذه الحالة، فإنَّ $\cos t = 0$ (متطابقة فيثاغورس). وبالرجوع إلى اقتران الموقع، أُلاحِظ أنَّ قيمته تُصبِح صفرًا (موقع الاتزان) عندما $\cos t = 0$؛ ما يعني أنَّ سرعة الجسم القياسية تكون أكبر ما يُمكِن عندما يمرُّ الجسم بموقع الاتزان.
- اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع، فإنَّ قيمة تسارع الجسم تكون دائمًا معكوس قيمة موقع الجسم؛ ذلك أنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وأنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.
- تكون قيمة التسارع صفرًا فقط عند موقع الاتزان؛ لأنَّ قوَّة الجاذبية وقوَّة الزنبرك تُلغي إحداهما الأخرى عند هذه النقطة. ولكنْ، إذا كان الجسم عند أيِّ موقع آخر، فإنَّ هاتين القوَّتين لا تكونان متساويتين، والتسارع لا يساوي صفرًا.

### الدعم البياني:




ألاحِظ من التمثيل البياني المجاور لاقتراني الموقع والسرعة أنَّ موقع الجسم يتراوح بين القيمة $s = 5$ cm والقيمة $s = -5$ cm، وأنَّ سرعته تتراوح بين القيمة $v = 5$ cm/s والقيمة $v = -5$ cm/s.

ألاحِظ أيضًا أنَّ السرعة القياسية تكون أكبر ما يُمكِن عندما يقطع منحنى اقتران الموقع المحور $x$ (موقع الاتزان).

**أتذكَّر**

إذا كانت المعادلة التي تَصِف الإزاحة $y$ لجسم عند الزمن $t$ هي: $y = a \sin \omega t$، أو: $y = a \cos \omega t$، فإنَّ الجسم يكون في حركة توافقية بسيطة.

**أتذكَّر**

متطابقة فيثاغورس:
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

**الربط بالفيزياء**

تسارع الجسم في كل لحظة يرتبط بمُحصِّلة القوى المُؤثِّرة فيه بحسب القانون الثاني لنيوتن: $\sum F = ma$، حيث $a$ تسارع الجسم، و$m$ كتلته، و$\sum F$ مُحصِّلة القوى المُؤثِّرة فيه.

### أتحقَّق من فهمي

يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 7 \sin t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث $t$ الزمن بالثواني، و$s$ الموقع بالأمتار:

a) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

b) أَصِف حركة الجسم.

### أتدرَّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 2 \sin x - e^x$
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{4} - \pi \cos x$
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x^3}\right) + x^4$
4. $f(x) = e^{x+1} + 1$
5. $f(x) = e^x + x^e$
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{10}{x^n}\right)$

إذا كان: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

7 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f$ عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

8 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f$ عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^{\pi})$.

9 أجد قيمة $x$ التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^x - 2x$.

10 اختيار من مُتعدِّد:

أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi - 1$

c) $y = x - \pi + 1$ d) $y = x + \pi + 1$

11 إذا كان: $f(x) = \ln(kx)$، حيث $k$ عدد حقيقي موجب، و $x > 0$، فأُبيِّن أنَّ $f'(x) = \frac{1}{x}$.

إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

12 أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

13 أُثبِت أنَّ المقطع $x$ للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و $t$ الزمن بالثواني:

14 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

15 أجد قِيَم $t$ التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

16 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

17 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و $t$ الزمن بالثواني:

18 أُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم.

19 أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته صفرًا.

زنبرك: يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث $t$ الزمن بالثواني، و $s$ الموقع بالأمتار:

20 أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

21 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

22 أَصِف حركة الجسم.

## مهارات التفكير العليا

23 تبريـــر: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$، حيث $a$ عدد حقيقي، فأجـــد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور $y$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

24 تحدٍّ: أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$.

تبرير: إذا كان الاقتران: $y = ke^x$، حيث: $k > 0$، وكان منحناه يقطع المحور $y$ عند النقطة $P$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

25 أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة $P$ مع المحور $x$.

26 إذا كان العمودي على المماس عند النقطة $P$ يقطع المحور $x$ عند النقطة $(100, 0)$، فأجد قيمة $k$.

تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $y = \log x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

27 أُثبِت أنَّ: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$.

28 اعتمادًا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران: $y = \log ax^2$، حيث $a$ عدد حقيقي موجب.

تبرير: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t,\ t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و $t$ الزمن بالثواني:

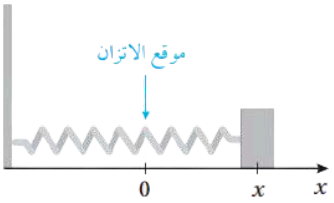
29 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد $t$ ثانية.

30 أجد موقع الجُسَيْم عندما كان في حالة سكون لحظي أوَّل مَرَّة بعد انطلاقه.

31 أجد موقع الجُسَيْم عندما يكون تسارعه صفرًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

**مسألة اليوم**

يهتزُّ جسم مُثبَّت في زنبرك أفقيًّا على سطح أملس كما في الشكل المجاور. ويُمثِّل الاقتران: $x(t) = 8 \sin t$ موقع الجسم، حيث $t$ الزمن بالثواني، و $x$ الموقع بالسنتيمترات:




1) أجد موقع الجسم وسرعته وتسارعه عندما $t = \frac{2}{3}\pi$.

2) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = \frac{2}{3}\pi$؟

## أسئلة كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

2. $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$

3. $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

4. أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

5. أُثبِت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران: $f(x) = 3x + \sin x + 2$

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3,\ t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و $t$ الزمن بالثواني:

6. أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد $t$ ثانية.

7. أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسَيْم في حالة سكون لحظي.

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

8 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

9 أجد الإحداثي $x$ للنقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم: $6x - 2y + 5 = 0$

إذا كان: $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

11 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

الدرس الثاني

# مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

# Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

### مشتقة ضرب اقترانين

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقات اقترانات مختلفة، مثل: اقترانات القوَّة، والاقتران الأُسّي الطبيعي، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، واقتران الجيب، واقتران جيب التمام. تعلَّمْتُ أيضًا إيجاد مشتقات مضاعفات هذه الاقترانات والاقترانات الناتجة من جمعها وطرحها. ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد مشتقات الاقترانات الناتجة من ضرب هذه الاقترانات؟ فمثلًا، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فكيف يُمكِن إيجاد مشتقة $f(x)g(x)$؟

لنفترض أنَّ: $y = f(x)g(x) = uv$، $f(x) = u, g(x) = v$، وأنَّ $\Delta x$ هي زيادة صغيرة في $x$، ينتج منها تغيُّر في $u, v, y$، مقداره $\Delta u, \Delta v, \Delta y$ على الترتيب. ومنه، فإنَّ:

$$f(x+\Delta x) = u + \Delta u,\ g(x+\Delta x) = v + \Delta v,\ f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) = y + \Delta y$$

إذن:

بالتعويض: $y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$

بطرح $y$ من طرفي المعادلة: $\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y$

بتعويض $y = uv$: $= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv$

باستعمال خاصية التوزيع: $= uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v - uv$

بالتبسيط: $= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v$

بقسمة جميع أطراف المعادلة على $\Delta x$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$

ميل المماس عند النقطة $(x, y)$: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$

باستعمال تعريف المشتقة: $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + (\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u)\frac{dv}{dx}$

$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$: $= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + (0)\frac{dv}{dx}$

بالتبسيط: $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

بالتعويض: $(fg)'(x) = f(x)\,g'(x) + g(x)\,f'(x)$

إذن: $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$.

**نظرية**

**بالكلمات:** مشتقة ضرب اقترانين هي الاقتران الأوَّل مضروبًا في مشتقة الاقتران الثاني، ثمَّ يضاف إليه الاقتران الثاني مضروبًا في مشتقة الاقتران الأوَّل.

**بالرموز:** إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $f(x)g(x)$ على النحو الآتي:

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

**مثال 1**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

الاقتران المعطى: $f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$

قاعدة مشتقة الضرب: $f'(x) = (3x-2x^2)\frac{d}{dx}(5+4x) + (5+4x)\frac{d}{dx}(3x-2x^2)$

قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الطرح: $= (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$

باستعمال خاصية التوزيع: $= (12x - 8x^2) + (15 - 8x - 16x^2)$

بالتبسيط: $= -24x^2 + 4x + 15$

**اتعلَّم**

يُمكِنني حلُّ الفرع 1 من المثال 1 باستعمال خاصية التوزيع أوَّلًا، ثمَّ اشتقاق الاقتران الناتج باستعمال قاعدة مشتقة المجموع، أو قاعدة مشتقة الفرق.

2) $f(x) = xe^x$

الاقتران المعطى: $f(x) = xe^x$

قاعدة مشتقة الضرب: $f'(x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$

قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي: $= xe^x + e^x \times 1$

بالتبسيط: $= xe^x + e^x$

**أخطاء شائعة**

من الأخطاء الشائعة عند إيجاد مشتقة حاصل ضرب اقترانين، ضرب مشتقة الاقتران الأوَّل في مشتقة الاقتران الثاني.

**أتحقَّق من فهمي**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

b) $f(x) = \ln x \ \cos x$

**مشتقة قسمة اقترانين**

مشتقة قسمة اقترانين ليست حاصل قسمة مشتقة كلٍّ منهما، مثلما أنَّ مشتقة ضرب اقترانين ليست حاصل ضرب مشتقة كلٍّ منهما. فمثلًا، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فكيف يُمكِن إيجاد مشتقة $\frac{f(x)}{g(x)}$ ؟

لنفترض أنَّ: $y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u}{v}$, $f(x) = u, g(x) = v$. ومنه، فإنَّ: $u = vy$. وبما أنَّ الاقتران $u$ هو حاصل ضرب اقترانين، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقته باستعمال قاعدة مشتقة الضرب على النحو الآتي:

$$\frac{du}{dx} = v\frac{dy}{dx} + y\frac{dv}{dx}$$

ومن ثَمَّ، فإنَّه يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ كما يأتي:

بإعادة ترتيب المعادلة $v\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}$

بقسمة طرفي المعادلة على $v$ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - y\frac{dv}{dx}}{v}$

بتعويض $y = \frac{u}{v}$ $= \frac{\frac{du}{dx} - \frac{u}{v} \times \frac{dv}{dx}}{v}$

بالتبسيط $= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

بالتعويض $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

إذن: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$.

**نظرية** مشتقة القسمة

**بالكلمات:** مشتقة قسمة اقترانين هي المقام في مشتقة البسط مطروحًا منه البسط في مشتقة المقام، ثمَّ قسمة الجميع على مُربَّع المقام.

**بالرموز:** إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، وكان $g(x) \neq 0$، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $\frac{f(x)}{g(x)}$ على النحو الآتي:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x)}{(g(x))^2}$$

**مثال 2**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

الاقتران المعطى $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

قاعدة مشتقة القسمة $f'(x) = \frac{(1+x^2)\frac{d}{dx}(1-x^2) - (1-x^2)\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$

قواعد مشتقات اقتران القوَّة، والطرح، والجمع $= \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}$

باستعمال خاصية التوزيع $= \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1+x^2)^2}$

بالتبسيط $= \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$

2 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$

الاقتران المعطى $f(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}$

قاعدة مشتقة القسمة $f'(x)=\dfrac{(x+1)\frac{d}{dx}(\ln x)-(\ln x)\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2}$

قواعد مشتقات اقتران القوّة، والطرح، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $=\dfrac{(x+1)\left(\frac{1}{x}\right)-(\ln x)(1)}{(x+1)^2}$

باستعمال خاصية التوزيع $=\dfrac{1+\frac{1}{x}-\ln x}{(x+1)^2}$

بالتبسيط $=\dfrac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$

### أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ المشتقة هي مُعدَّل تغيُّر كمية بالنسبة إلى كمية أُخرى عند لحظة مُعيَّنة. فمثلًا، إيجاد $\dfrac{dy}{dx}$ يعني إيجاد مُعدَّل تغيُّر $y$ بالنسبة إلى $x$.

تتغيَّر القِيَم في كثير من المواقف الحياتية بالنسبة إلى الزمن. فمثلًا، إذا كان $r$ كمية مُعيَّنة؛ فإنَّ مُعدَّل تغيُّرها بالنسبة إلى الزمن $t$ هو $\dfrac{dr}{dt}$.

### مثال 3 : من الحياة

مرض تعطى درجة حرارة مريض أثناء مرضه بالاقتران: $T(t)=\dfrac{4t}{1+t^2}+98.6$، حيث $t$ الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض، و $T$ درجة الحرارة بالفهرنهايت:

1 أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

أجد $T'(t)$:

الاقتران المعطى $T(t)=\dfrac{4t}{1+t^2}+98.6$

قاعدتا مشتقة القسمة، ومشتقة الثابت $T'(t)=\dfrac{(1+t^2)\frac{d}{dt}(4t)-(4t)\frac{d}{dt}(1+t^2)}{(1+t^2)^2}$

قاعدتا مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة المجموع $=\dfrac{(1+t^2)(4)-(4t)(2t)}{(1+t^2)^2}$

باستعمال خاصية التوزيع $=\dfrac{4+4t^2-8t^2}{(1+t^2)^2}$

بالتبسيط $=\dfrac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$

إذن، مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن هو:

$$T'(t)=\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}.$$

2 أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض عندما $t = 2$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

أجد $T'(2)$:

مشتقة $T(t)$ $$T'(t) = \frac{4 - 4t^2}{(1 + t^2)^2}$$

بتعويض $t = 2$ $$T'(2) = \frac{4 - 4(2)^2}{(1 + (2)^2)^2}$$

بالتبسيط $$= -0.48$$

إذن، عندما يكون الزمن 2 h، فإنَّ درجة حرارة المريض تقل بمقدار 0.48 درجة فهرنهايتية لكل ساعة.

## أتحقَّق من فهمي

سكّان يعطى عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران: $P(t) = \frac{500t^2}{2t + 9}$، حيث $t$ الزمن بالسنوات، و $P$ عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة عندما $t = 12$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

## مشتقة المقلوب

يُمكِن إيجاد قاعدة عامة لمشتقة مقلوب أيِّ اقتران باستعمال قاعدة القسمة. فمثلًا، إذا كان $f(x)$ اقترانًا، حيث: $f(x) \neq 0$، وكان: $A(x) = \frac{1}{f(x)}$، فإنَّ:

قاعدة مشتقة القسمة $$A'(x) = \frac{f(x) \times 0 - 1 \times f'(x)}{(f(x))^2}$$

بالتبسيط $$= \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

إذن: $A'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$.

**نظرية** مشتقة المقلوب

**بالكلمات:** مشتقة مقلوب اقتران هي سالب مشتقة الاقتران مقسومًا على مُربَّع الاقتران.

**بالرموز:** إذا كان $f(x)$ اقترانًا، حيث: $f(x) \neq 0$، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $\frac{1}{f(x)}$ على النحو الآتي:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

**أتعلَّم**

إذا كان $c$ عددًا ثابتًا، وكان $f(x)$ اقترانًا، وكان: $h(x) = \frac{c}{f(x)}$، حيث: $f(x) \neq 0$، فإنَّ: $h'(x) = \frac{-cf'(x)}{(f(x))^2}$

## مثال 4

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

الاقتران المعطى $$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

قاعدة مشتقة المقلوب $$f'(x) = \frac{-\frac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة الجمع $$= \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

2 $f(t)=\dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$

الاقتران المعطى $f(t)=\dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$

قاعدة مشتقة المقلوب $f'(t)=\dfrac{-\frac{d}{dt}(t+\frac{1}{t})}{(t+\frac{1}{t})^2}$

قاعدتا مشتقة اقتران القوّة، ومشتقة المقلوب $=\dfrac{-1+\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{1}{t})^2}$

بالتبسيط $=\dfrac{1-t^2}{t^2(t+\frac{1}{t})^2}$

### أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x)=\dfrac{1}{5x-x^2}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{e^x+\sqrt{x}}$

## مشتقات الاقترانات المثلثية

تعلَّمْتُ في الدرس السابق كيفية إيجاد مشتقة اقتران الجيب ومشتقة اقتران جيب التمام.

وسأتعلَّم الآن كيف أجد مشتقات الاقترانات المثلثية باستعمال مشتقة القسمة. فمثلًا، لإيجاد مشتقة اقتران الظلِّ، أفترض أنَّ $f(x)=\tan x$. وباستعمال مشتقة القسمة، فإنَّ:

المتطابقات النسبية $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

قاعدة مشتقة القسمة $f'(x)=\dfrac{(\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x)-(\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)}{(\cos x)^2}$

قاعدتا مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام $=\dfrac{(\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

باستعمال خاصية التوزيع $=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}$

متطابقات فيثاغورس $=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

متطابقات المقلوب $=\sec^2 x$

**نظرية** مشتقات الاقترانات المثلثية

$\dfrac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$ $\quad$ $\dfrac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x$

$\dfrac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$ $\quad$ $\dfrac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x$

إثبات الحالات الثلاث المتبقية من النظرية جاء بصورة تدريب في المسائل (22 – 20).

**مثال 5**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

**1** $f(x) = x^2 \sec x$

الاقتران المعطى
$$f(x) = x^2 \sec x$$

قاعدة مشتقة الضرب
$$f'(x) = x^2 \frac{d}{dx}(\sec x) + \sec x \frac{d}{dx}(x^2)$$

قاعدتا مشتقة اقتران القاطع، ومشتقة اقتران القوّة
$$= x^2 \sec x \tan x + 2x \sec x$$

**أتذكّر**

القاطع $(\sec x)$ هو مقلوب جيب التمام، وقاطع التمام $(\csc x)$ هو مقلوب الجيب.

**2** $f(x) = \dfrac{\csc x}{1 + \tan x}$

الاقتران المعطى
$$f(x) = \frac{\csc x}{1 + \tan x}$$

قاعدة مشتقة القسمة
$$f'(x) = \frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(\csc x) - (\csc x)\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

قواعد مشتقات اقتران الظلّ، والمجموع، وقاطع التمام
$$= \frac{(1+\tan x)(-\csc x \cot x) - (\csc x)(\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

باستعمال خاصية التوزيع
$$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x \cot x \tan x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

بالتبسيط
$$= \frac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

**أتحقَّق من فهمي**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = x \cot x$

b) $f(x) = \dfrac{\tan x}{1 + \sin x}$

## المشتقات العليا

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان $f(x)$ اقترانًا، فإنَّ المشتقة $f'(x)$ هي اقتران أيضًا، ومن المُمكِن إيجاد مشتقته، التي يُرمَز إليها بالرمز $f''(x)$. وفي هذه الحالة، يُطلَق على الاقتران الجديد $f''(x)$ اسم **المشتقة الثانية** للاقتران $f(x)$.

إذا كان $f''(x)$ اقترانًا، فإنَّه يُرمَز إلى مشتقته بالرمز $f'''(x)$، وتُسمّى **المشتقة الثالثة** للاقتران $f(x)$. ويستمر إيجاد المشتقات وتسمياتها على النحو نفسه، ويُستعمَل الرمز $f^{(n)}(x)$ للدلالة على **المشتقة $(n)$**.

**رموز رياضية**

تُستعمَل الرموز: $\frac{d^2y}{dx^2}$, $y''$, $\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$ للتعبير عن المشتقة الثانية، وتُستعمَل الرموز: $\frac{d^ny}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $\frac{d^n}{dx^n}(f(x))$ للتعبير عن المشتقة $(n)$.

**مثال 6**

أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران: $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$.

المشتقة الأولى: $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$

المشتقة الثانية: $f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

المشتقة الثالثة: $f'''(x) = \frac{6}{x^4}$

المشتقة الرابعة: $f^{(4)}(x) = -\frac{24}{x^5}$

**أتعلَّم**

يشير الرمز $f^{(n)}$ إلى المشتقة $(n)$ للاقتران $f$، في حين يشير الرمز $f^n$ إلى الاقتران $f$ مرفوعًا إلى القوَّة $n$.

**أتحقَّق من فهمي**

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x) = x \sin x$.

## أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = \frac{x^3}{2x-1}$

2. $f(x) = x^3 \sec x$

3. $f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$

4. $f(x) = e^x (\tan x - x)$

5. $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$

6. $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

7 $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x} + 3)$

8 $f(x) = \dfrac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$

9 $f(x) = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{x - 3}$

10 $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

11 $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، وكان $g(0) = -1, g'(0) = 2$ ,
$f(0) = 5, f'(0) = -3$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

12 $(fg)'(0)$

13 $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

14 $(7f - 2fg)'(0)$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة $x$ المعطاة:

15 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, x = -2$

16 $f(x) = \frac{1 + x}{1 + \sqrt[3]{x}}, x = 8$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

17 $f(x)=\frac{1-x}{1+\sqrt{x}}, x=4$

18 $f(x)=\frac{1+x}{1+e^x}, (0, \frac{1}{2})$

19 $f(x)=e^x \cos x+\sin x, (0, 1)$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ ممّا يأتي اعتمادًا على أنَّ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ ، $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ :

20 $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

21 $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

22 $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

أُلاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أجد المشتقة العليا المطلوبة:

23 $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$

24 $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$

25 $f^{(4)}(x) = 2x+1, f^{(6)}(x)$

**26** **نباتات هجينة:** وجد فريق بحث زراعي أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس $h$ بالأمتار باستعمال الاقتران:

$h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث $t$ الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$،
فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

**27** أجد $\frac{dy}{dx}$، و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

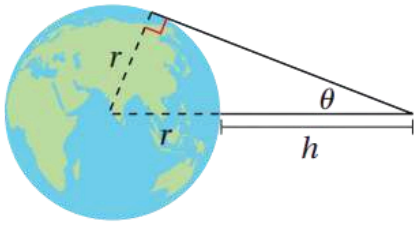
**28** أُثبِت أنَّ: $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$.

**الحل:**

$$2\frac{dy}{dx} - 2y = 2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x$$
$$= 2e^x \cos x$$
$$= \frac{d^2y}{dx^2}$$

أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمارُ الصناعيةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية $\theta$ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور.

إذا كان $h$ يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و $r$ يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:




**29** أُثبِت أنَّ: $h = r(\csc\theta - 1)$.

**30** أجد مُعدَّل تغيُّر $h$ بالنسبة إلى $\theta$ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad.
(أفترض أنَّ $r = 6371$ km).

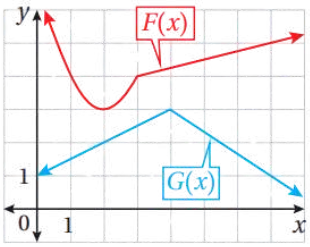
31 إذا كان: $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$، فأُثبِت أنَّ:

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}.$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$.

إذا كان: $P(x) = F(x)G(x)$، وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$،

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:




32 $P'(2)$

33 $Q'(7)$

**الحل:**

$$Q'(7) = \frac{G(7)F'(7) - F(7)G'(7)}{G^2(7)}$$

$$= \frac{1 \times \frac{1}{4} - 5 \times -\frac{2}{3}}{1} = \frac{43}{12}$$

## مهارات التفكير العليا

تبرير:

إذا كان: $y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

34 أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

35 أُبيِّن عدم وجود مماس أفقي للاقتران $y$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

تحدٍّ: إذا كان: $y=\frac{x+1}{x-1}$، حيث: $x\neq 1$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

36 أجد $\frac{dy}{dx}$.

37 أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر $x$ ($x$ اقتران بالنسبة إلى $y$)، ثمَّ أجد $\frac{dx}{dy}$.

38 أُبيِّن أنَّ $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

تبرير إذا كان: $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

39 أُثبِت أنَّ: $f''(x)=\frac{6\ln x-5}{x^4}$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

40 أجد قيمة المقدار:

**مسألة اليوم** كلَّما ازداد سطوع الضوء الساقط على بؤبؤ العين تقلَّصت مساحة البؤبؤ.

يُستعمَل الاقتران: $A(b) = \frac{40 + 24b^{0.4}}{1 + 4b^{0.4}}$ لحساب مساحة بؤبؤ العين بالملّيمترات المُربَّعة، حيث $b$ مقدار سطوع الضوء بوحدة اللومن (lm).

وتُعرَف حساسية العين للضوء بأنَّها مشتقة اقتران مساحة البؤبؤ بالنسبة إلى السطوع.

أجد اقترانًا يُمثِّل حساسية العين للضوء.

## أسئلة كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2 $f(x) = -\csc x - \sin x$

3 $f(x) = \frac{x + c}{x + \frac{c}{x}}$

4 $f(x) = x \cot x$

5 $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

6 $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2}$

7 $f(x) = x\left(1 - \dfrac{4}{x+3}\right)$

8 $f(x) = \dfrac{3(1 - \sin x)}{2 \cos x}$

9 $f(x) = (x+1)e^x$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

10 $f(x) = x^2 \cos x, \left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

11 $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}, (\pi, -1)$

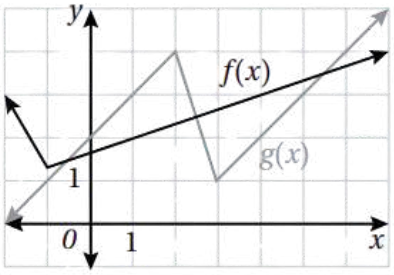
أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

12 $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$

13 $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

14 $g(x) = \dfrac{8(x-2)}{e^x}$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$. إذا كان: $u(x) = f(x)g(x)$، وكان: $v(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:




15 $u'(1)$

16 $v'(4)$

17 إذا كان: $f(x) = x \sec x$، فأُثبِت أنَّ:

$f'(x) = \sec x\,(1 + x \tan x)$.

18 إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$، حيث: $x > 0$، فأجد $f'(x)$، و $f''(x)$.

يُمثِّل الاقتران: $v(t) = \frac{10}{2t+15}$ , $t \geq 0$ سرعة سيّارة بدأت الحركة
في مسار مستقيم، حيث تقاس $v$ بالقَدم لكل ثانية:

19 أجد تسارع السيّارة عندما $t = 5$.

20 أجد تسارع السيّارة عندما $t = 20$.

21 يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$، ويعطى عرضه
بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث $t$ الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات.
أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

الدرس الثالث

# قاعدة السلسلة
# The Chain Rule

## قاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب اقتراني قوَّة، وذلك بإيجاد مشتقة الاقتران الخارجي وقيمته عند الاقتران الداخلي، ثمَّ ضربه في مشتقة الاقتران الداخلي. تُعَدُّ هذه الطريقة إحدى أهم قواعد الاشتقاق، وتُسمّى **قاعدة السلسلة**

فمثلًا، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $h(x) = (5x^3 - 2x)^4$، الذي فيه $u = 5x^3 - 2x$ اقتران داخلي، و $y = u^4$ اقتران خارجي، على النحو الآتي:

قاعدة السلسلة $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

بتعويض $\frac{du}{dx} = 15x^2 - 2, \frac{dy}{dx} = 4u^3$ $= 4u^3 \times (15x^2 - 2)$

بتعويض $u = 5x^3 - 2x$ $= 4(5x^3 - 2x)^3 (15x^2 - 2)$

**أتذكَّر**

$h(x) = \underbrace{(\overbrace{5x^3 - 2x}^{\text{الداخلي}})^4}_{\text{الخارجي}}$

بوجه عام، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب اقترانين كما يأتي:

**نظرية** قاعدة السلسلة

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$، حيث تُحسَب قيمة $\frac{dy}{du}$ عندما $u = g(x)$.

**أتذكَّر**

يُعبِّر الرمز $\frac{dy}{du}$ عن مُعدَّل تغيُّر $y$ بالنسبة إلى $u$، ويُعبِّر الرمز $\frac{du}{dx}$ عن مُعدَّل تغيُّر $u$ بالنسبة إلى $x$.

وبكلمات أُخرى، مشتقة الاقتران المُركَّب $f(g(x))$ هي حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي $f$ عند الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$.

يُمكِن التوصُّل إلى النتائج الآتية عند تطبيق قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة اقترانات ناتجة من تركيب اقترانين، أحدهما اقتران مثلثي، أو اقتران أُسِّي طبيعي، أو اقتران لوغاريتمي طبيعي:

## قاعدة السلسلة والاقترانات المشهورة

**نتائج**

إذا كان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin g(x)\right) = \cos\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\csc g(x)\right) = -\csc\left(g(x)\right)\cot\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\cos g(x)\right) = -\sin\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\sec g(x)\right) = \sec\left(g(x)\right)\tan\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\tan g(x)\right) = \sec^2\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\cot g(x)\right) = -\csc^2\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(e^{(g(x))}\right) = e^{g(x)} \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

**مثال 1**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

**1** $f(x) = \cos 2x$

الاقتران المعطى

$$f(x) = \cos 2x$$

مشتقة $\cos g(x)$، حيث: $g(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos 2x) = -\sin 2x \times 2$$

بالتبسيط

$$= -2\sin 2x$$

**2** $f(x) = e^{(x+x^2)}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = e^{(x+x^2)}$$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x+x^2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{(x+x^2)}) = e^{(x+x^2)} \times (1+2x)$$

**3** $f(x) = \ln(\sin x)$

الاقتران المعطى

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = \sin x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln(\sin x)\right) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

المتطابقات المثلثية النسبية

$$= \cot x$$

**أتذكَّر**

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

**أتذكَّر**

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

**أتحقَّق من فهمي**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \tan 3x^2$

b) $f(x) = e^{\ln x}$

c) $f(x) = \ln(\cot x)$

### قاعدة سلسلة القوَّة

يُعَدُّ الاقتران المُركَّب الذي يكون في صورة $f(x) = (g(x))^n$ أحد أكثر الاقترانات المُركَّبة شيوعًا، وتُمثِّل مشتقته حالة خاصة من قاعدة السلسلة، وتُسمّى

**قاعدة سلسلة القوَّة**

حيث الاقتران الخارجي هو اقتران قوَّة.

**مفهوم أساسي** قاعدة سلسلة القوَّة

إذا كان $n$ أيَّ عدد حقيقي، وكان: $u = g(x)$ اقترانًا، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $(g(x))^n$ على النحو الآتي:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \times \frac{du}{dx}$$

**مثال 2**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

**1** $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$f(x) = (x^2-1)^{2/3}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسّية

$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$ قاعدة سلسلة القوَّة

$= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times 2x$ باشتقاق $x^2 - 1$

$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$ الصورة الجذرية

**2** $f(x) = \tan^4 x$

$f(x) = \tan^4 x = (\tan x)^4$ بإعادة كتابة الاقتران المعطى

$f'(x) = 4(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x)$ قاعدة سلسلة القوَّة

$= 4\tan^3 x \times \sec^2 x$ باشتقاق $\tan x$

**3** $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$f(x) = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسّية

$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(\ln x)$ قاعدة سلسلة القوَّة

$= \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{1}{x}$ باشتقاق $\ln x$

$= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ الصورة الجذرية

**أتعلَّم**

إذا كان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$(\sqrt{g(x)})' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.

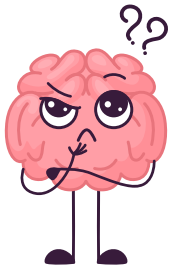
**أُفكِّر**

ما وجه الاختلاف بين الاقتران:

$f(x) = \tan^4 x$

والاقتران:

$h(x) = \tan x^4$ ؟



### أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

c) $f(x) = (\ln x)^5$

### الاستعمال المُتكرِّر لقاعدة السلسلة

أحتاج أحيانًا إلى استعمال قاعدة السلسلة أكثر من مَرَّة لإيجاد المشتقة. فمثلًا، إذا كان $y = f(u), u = g(x), x = h(t)$، حيث $f$ و $g$ و $h$ اقترانات، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $y$ بالنسبة إلى $t$ باستعمال قاعدة السلسلة مَرَّتين كالآتي:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

### مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = e^{\csc 4x}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = e^{\csc 4x}$$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = \csc 4x$

$$f'(x) = e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x)$$

مشتقة $\csc g(x)$، حيث: $g(x) = 4x$

$$= e^{\csc 4x} \times -\csc 4x \times \cot 4x \times \frac{d}{dx}(4x)$$

بالتبسيط

$$= -4e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$$

**2** $f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$

الاقتران المعطى

$f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$

مشتقة $\sin g(x)$، حيث:

$g(x) = \tan\sqrt{3x^2+4}$

$f'(x) = \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \frac{d}{dx}\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$

مشتقة $\tan g(x)$، حيث:

$g(x) = \sqrt{3x^2+4}$

$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x^2+4}\right)$

بكتابة $\sqrt{3x^2+4}$ في صورة أُسّية

$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}$

قاعدة سلسلة القوّة

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)$

باشتقاق $3x^2+4$

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times 6x$

الصورة الجذرية، والتبسيط

$= \frac{3x\cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$

## أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$

b) $f(x) = (2 + (x^2+1)^4)^3$

## مثال 4

**1** أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$.

الاقتران المعطى

$f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$

قاعدة مشتقة الضرب

$f'(x) = e^{-0.2x}\frac{d}{dx}(\sin 4x) + \sin 4x\frac{d}{dx}(e^{-0.2x})$

قاعدة السلسلة

$= e^{-0.2x} \times 4\cos 4x + \sin 4x \times -0.2e^{-0.2x}$

بإعادة كتابة الاقتران

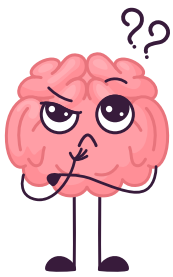
$= 4e^{-0.2x}\cos 4x - 0.2e^{-0.2x}\sin 4x$

بتعويض $x = \frac{\pi}{8}$

$f'(\frac{\pi}{8}) = 4e^{-0.2(\pi/8)}\cos 4(\frac{\pi}{8}) - 0.2e^{-0.2(\pi/8)}\sin 4(\frac{\pi}{8})$

بالتبسيط

$= -0.2e^{-0.025\pi}$



**أفكّر**

هل يُمكن إيجاد مشتقة الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ بطريقة أُخرى؟

2 أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران:
$f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ عندما $x=0$.

الاقتران المعطى

$$f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$$

قاعدة سلسلة القوّة

$$f'(x)=2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\times\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)$$

قاعدة مشتقة القسمة

$$=2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\times\left(\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right)$$

بالتبسيط

$$=\frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}$$

بتعويض $x=0$

$$f'(0)=\frac{2(3(0)-1)(-3(0)^2+2(0)+9)}{((0)^2+3)^3}$$

بالتبسيط

$$=\frac{-18}{27}=\frac{-2}{3}$$

إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x=0$ هو: $\frac{-2}{3}$.

ومنه، فإنَّ ميل العمودي على المماس عندما $x=0$ هو: $\frac{3}{2}$.

## أتحقَّق من فهمي

a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران:
$f(x)=(2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x=1$.

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران:
$f(x)=\frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x=\frac{\pi}{2}$.

### مثال 5 : من الحياة

**أعمال:** طرحت إحدى الشركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثمَّ رصدت عدد القطع المَبيعة منذ طرحه.

إذا مثَّل الاقتران: $N(t)=\frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}$ , $t>0$ عدد القطع المَبيعة منذ طرح هذا المُنتَج، حيث $t$ الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

**1** أجد مُعدَّل تغيُّر عدد القطع المَبيعة بالنسبة إلى الزمن.

أجد $N'(t)$:

الاقتران المعطى
$$N(t)=\frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}$$

قاعدة مشتقة القسمة
$$N'(t)=\frac{(2t+1)^2\frac{d}{dt}(250000\,t^2)-(250000\,t^2)\frac{d}{dt}(2t+1)^2}{((2t+1)^2)^2}$$

قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة
$$=\frac{(2t+1)^2(500000\,t)-(250000\,t^2)\,2(2t+1)\times 2}{(2t+1)^4}$$

بالتبسيط
$$=\frac{(2t+1)^2(500000\,t)--(1000000\,t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

بإخراج العامل المشترك
$$=\frac{(2t+1)(500000\,t)\,((2t+1)\ -2t)}{(2t+1)^4}$$

بقسمة البسط والمقام على $(2t+1)$
$$=\frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$$

**2** أجد $N'(52)$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

أجد $N'(52)$:

مشتقة الاقتران $N(t)$
$$N'(t)=\frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$$

بتعويض $t=52$
$$N'(52)=\frac{500000\,(52)}{(2(52)+1)^3}$$

باستعمال الآلة الحاسبة
$$\approx 22$$

إذن، $N'(52)=22$، وهذا يعني أنَّ إجمالي عدد القطع المَبيعة من المُنتَج يزداد بمُعدَّل 22 قطعة لكل أسبوع بعد مرور 52 أسبوعًا على طرح المُنتَج في الأسواق.

### أتحقَّق من فهمي

تُحسَب قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات بالدينار باستعمال الاقتران: $U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$، حيث $x$ عدد القطع المَبيعة من المُنتَج:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

b) أجد $U'(20)$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

## مشتقة $a^{g(x)}$

تعلَّمْتُ سابقًا كيف أجد مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي: $f(x) = e^x$. ولكنْ، كيف يُمكِنني إيجاد مشتقة الاقتران: $f(x) = a^x$، حيث $a$ عدد حقيقي موجب؟

يُمكِن استعمال خصائص اللوغاريتمات لكتابة $a^x$ بدلالة $e^x$، حيث $a$ عدد حقيقي موجب، و $a \neq 1$، كما يأتي:

الخصائص الأساسية في اللوغاريتمات: $a^x = e^{\ln a^x}$

قانون القوّة في اللوغاريتمات: $a^x = e^{x \ln a}$

يُمكِن إيجاد مشتقة $a^x$ باستعمال قاعدة السلسلة كما يأتي:

مشتقة $a^x$: $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a})$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x \ln a$: $= e^{x \ln a} \times \ln a$

$e^{x \ln a} = a^x$: $= a^x \times \ln a$

إذن: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$.

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $a^{g(x)}$، حيث $g(x)$ اقتران، كما يأتي:

**نظرية** — مشتقة $a^{g(x)}$

إذا كان $a$ عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x) \qquad \frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$$

**أفكِّر**

هل ستظلُّ النظرية صحيحة إذا كان $a = 1$؟

**مثال 6**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 8^{5x}$

الاقتران المعطى: $f(x) = 8^{5x}$

مشتقة $a^{g(x)}$: $f'(x) = (\ln 8)8^{5x}(5) = (5 \ln 8)8^{5x}$

2 $f(x) = 6^{x^2}$

الاقتران المعطى: $f(x) = 6^{x^2}$

مشتقة $a^{g(x)}$: $f'(x) = (\ln 6)6^{x^2}(2x) = (2x \ln 6)\, 6^{x^2}$

3 $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

الاقتران المعطى: $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = 3x$، ومشتقة $a^{g(x)}$، وقاعدة مشتقة المجموع: $f'(x) = 3e^{3x} + (3 \ln 2)2^{3x}$

**أتحقَّق من فهمي**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$

b) $f(x) = 6^{1-x^3}$

c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

## مشتقة $\log_a g(x)$

لإيجاد مشتقة $\log_a x$، حيث $a$ عدد حقيقي موجب، و $a \neq 1$، أستعمل صيغة تغيير الأساس في اللوغاريتمات لكتابة $\log_a x$ بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، ثمَّ أجد المشتقة كما يأتي:

صيغة تغيير الأساس $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

بإيجاد المشتقة $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)$

بإخراج الثابت $\frac{1}{\ln a}$ $= \frac{1}{\ln a} \times \frac{d}{dx}(\ln x)$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي $= \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}$

بالتبسيط $= \frac{1}{x \ln a}$

إذن: $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$.

**أتذكَّر**

$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $\log_a g(x)$، حيث $g(x)$ اقتران، كما يأتي:

**نظرية** مشتقة $\log_a g(x)$

إذا كان $a$ عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a) g(x)}$$

**أتذكَّر**

عند التعامل مع الاقتران: $f(x) = \log_a g(x)$، فإنَّ $g(x) > 0$.

**مثال 7**

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \log \cos x$

الاقتران المعطى $f(x) = \log \cos x$

مشتقة $\log_a g(x)$ $f'(x) = \frac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x}$

المتطابقات النسبية $= -\frac{\tan x}{\ln 10}$

2 $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

قانون القسمة في اللوغاريتمات $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = \log_2 x^2 - \log_2 (x-1)$

مشتقة $\log_a g(x)$، وقاعدة مشتقة الطرح $f'(x) = \frac{2x}{(\ln 2)\, x^2} - \frac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$

بالتبسيط $= \frac{2}{(\ln 2)\, x} - \frac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$

**أتذكَّر**

يُكتَب اللوغاريتم الاعتيادي عادةً من دون أساس، حيث إنَّ أساسه 10

### أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log \sec x$

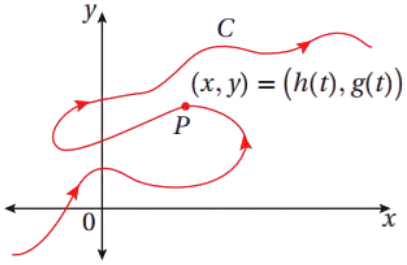
b) $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$

## مشتقة المعادلات الوسيطية

يُبيِّن الشكل المجاور الجُسَيْم $P$ الذي يتحرَّك على المنحنى $C$ لحظة مروره بالنقطة $(x, y)$.

أُلاحِظ أنَّ المنحنى $C$ لا يُحقِّق اختبار الخطِّ الرأسي؛ لذا لا يُمكِن إيجاد علاقة واحدة فقط في صورة $y = f(x)$ تربط جميع قِيَم $x$ بقِيَم $y$ المُناظِرة لها على المنحنى. ولكنْ، يُمكِن كتابة كلٍّ من الإحداثي $x$ والإحداثي $y$ في صورة اقتران بالنسبة إلى الزمن $t$ كما يأتي:

$$x = h(t), \qquad y = g(t)$$




يُشكِّل هذان الاقترانان معًا **معادلة وسيطية** للمنحنى $C$، ويُسمّى $t$ **المُتغيِّر الوسيط** لأن كل قيمة له تَحدِّد قيمة للمُتغيِّر $x$، وقيمة أخرى للمُتغيِّر $y$. وعند تمثيل الأزواج المُرتَّبة $(x, y)$ في المستوى الإحداثي، يَنتج المنحنى $C$.

يُمكِن تحديد قِيَم المُتغيِّر $t$ عن طريق فترة تُسمّى **مجال الوسيط** لأنَّ النقاط على المنحنى قد تتكرَّر بعد هذه الفترة.

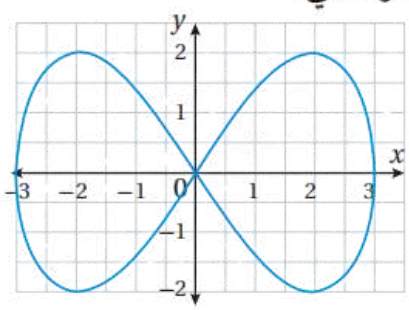
$\underbrace{t_0 \le t \le t_1}$ مجال الوسيط

$\underbrace{x = h(t) \quad , \quad y = g(t)}$ معادلة وسيطية

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 3\cos t, y = 2\sin 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لهذه المعادلة الوسيطية بإيجاد مشتقة كلٍّ من $x$ و $y$ بالنسبة إلى الوسيط $t$ أوَّلًا، ثمَّ استعمال قاعدة السلسلة على النحو الآتي:




$\frac{dx}{dt} = -3\sin t$ بإيجاد مشتقة $x$ بالنسبة إلى المُتغيِّر $t$

$\frac{dy}{dt} = 4\cos 2t$ بإيجاد مشتقة $y$ بالنسبة إلى المُتغيِّر $t$

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ باستعمال قاعدة السلسلة

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ بقسمة طرفي المعادلة على $\frac{dx}{dt}$، حيث: $\frac{dx}{dt} \neq 0$

$= \frac{4\cos 2t}{-3\sin t}$ بتعويض $\frac{dy}{dt} = 4\cos 2t, \frac{dx}{dt} = -3\sin t$

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة أيِّ معادلة وسيطية كما يأتي:

**مفهوم أساسي** مشتقة المعادلة الوسيطية

إذا كان $h$ و $g$ اقترانين بالنسبة إلى المُتغيِّر الوسيط $t$، وكان $x = h(t)$، و $y = g(t)$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

**مثال 8**

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = 2\sin t, \quad y = 3\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

**الخطوة 1:** أجد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

$\frac{dx}{dt} = 2\cos t$ بإيجاد مشتقة $x$ بالنسبة إلى المُتغيِّر $t$

$\frac{dy}{dt} = -3\sin t$ بإيجاد مشتقة $y$ بالنسبة إلى المُتغيِّر $t$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ مشتقة المعادلة الوسيطية

$= \frac{-3\sin t}{2\cos t}$ بتعويض $\frac{dy}{dt} = -3\sin t, \frac{dx}{dt} = 2\cos t$

$= -\frac{3}{2}\tan t$ المتطابقات النسبية

$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}$ بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$

$= -\frac{3}{2}$ بإيجاد الناتج

**أتذكَّر**

يُستعمَل الرمز: $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقة عندما $x = a$.

**الخطوة 2:** أجد $x$ و $y$ عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

$x = 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$

$y = 3\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$

إذن: $x = \frac{2}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

**الخطوة 3:** أجد معادلة المماس.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$y - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ بتعويض $x_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}, y_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}, m = -\frac{3}{2}$

$2y + 3x = 6\sqrt{2}$ بإعادة كتابة المعادلة

### أتحقّق من فهمي

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = \sec t \ , \quad y = \tan t \ , \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

### أتدرّب وأحُلُّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = e^{4x+2}$

2. $f(x) = 50e^{2x-10}$

3. $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$

4. $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

5 $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$

6 $f(x)=x^2\tan\frac{1}{x}$

7 $f(x)=3x-5\cos(\pi x)^2$

8 $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

9 $f(x)=(\ln x)^4$

10 $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\sin x}$

11 $f(x)=\sqrt[5]{x^2}+\overline{8x}$

12 $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

13 $f(x) = 2^{-x} \cos \pi x$

14 $f(x) = \frac{10 \log_4 x}{x}$

15 $f(x) = \left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

16 $f(x) = \log_3 (1 + x \ln x)$

17 $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin (e^{2x}$

18 $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة $x$ المعطاة:

19 $f(x) = 4e^{-0.5x^2}, x = -2$

20 $f(x) = x + \cos 2x, x = 0$

21 $f(x) = 2^x, x = 0$

22 $f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}, x = 3$

23 إذا كان: $A(x) = f(g(x))$، وكان:

$f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3,$

$g(5) = -2, g'(5) = 6$ ,

فأجـد $A'(5)$.

24 إذا كان: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$،

فأُثبِت أنَّ: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد $t$ ساعة في مجتمع بكتيري:

25 أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت $N$.

26 إذا كان مُعدَّل نمو المجتمع بعد $k$ ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة $k$ بدلالة الثابت $N$؟

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x) = \sin \pi x\,, f'''(x)$

28 $f(x) = \cos(2x + 1), f^{(5)}(x)$

29 $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

**الحل:**

$$f(x) = \cos x^2$$
$$f'(x) = -2x \sin x^2$$
$$f''(x) = (-2x)(2x \cos x^2) + (\sin x^2)(-2)$$
$$= -4x^2 \cos x^2 - 2\sin x^2$$

30 إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

31 **مواد مُشِعَّة:** يُمكِن نمذجة الكمية $A$ (بالغرام) المُتبقِّية من من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد $t$ يومًا باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

زنبرك: تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث $t$ الزمن بالثواني، و $s$ الموقع بالسنتيمترات:

32 أجد سرعة الكرة عندما $t = 1$.

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفرًا.

34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة $t$ المعطاة:

35 $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

36 $x = \frac{t}{2}, y = t^2 - 4, t = -1$

37 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \frac{\pi}{3}$

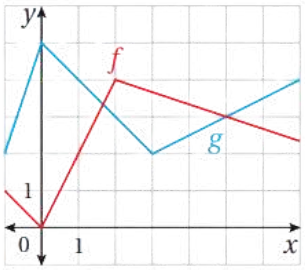
38 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t, t = -\frac{\pi}{4}$

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$،

حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما: $1 + \sqrt{2}$، و$1 - \sqrt{2}$ على الترتيب.

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان:
$h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:




40 $h'(1)$

41 $p'(1)$

## مهارات التفكير العليا

تبريـــر: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax + b)$، حيث $a$ و $b$ ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $P$ هو 1، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

42 أُثبِت أنَّ الإحداثي $x$ للنقطة $P$ أقل من 1

43 أجد قيمة كلٍّ من $a$ و $b$، علمًا بأنَّ $P$ هي النقطة $(0, 2)$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

44 أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = t^2, y = 2t$:

45 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة $t$.

46 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(a^2, 2a)$.

47 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|a|(2+a^2)^2$.

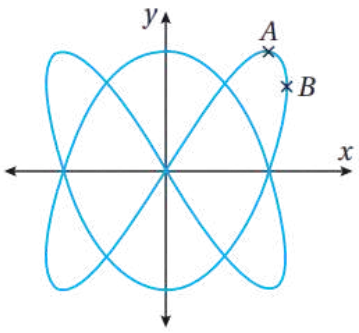
تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

48 $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

49 $y = e^x \sin^2 x \cos x$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$




50 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة $A$ الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي $A$.

51 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور $y$ عند النقطة $B$، فأجد إحداثيي $B$.

52 إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

تبرير: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث $s$ الموقع بالأمتار، و $t$ الزمن بالثواني:

53 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد $t$ ثانية.

54 أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته صفرًا.

55 متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

## أسئلة كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 100e^{-0.1x}$
2. $f(x) = \sin(x^2 + 1)$
3. $f(x) = \cos^2 x$
4. $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$
5. $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$
6. $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$
7. $f(x) = \log 2x$
8. $f(x) = \ln(x^3 + 2)$
9. $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3 + 2}\right)^2$

10 $f(x) = x^2\sqrt{20 - x}$

11 $f(x) = \dfrac{\sin(2x + 1)}{e^{x^2}}$

12 $f(x) = 3^{\cot x}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة $x$ المعطاة:

13 $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x,\ x = \dfrac{\pi}{2}$

14 $f(x) = (x^2 + 2)^3,\ x = -1$

15 $f(x) = \tan 3x,\ x = \dfrac{\pi}{4}$

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

16 أُثبِت أنَّ: $f'(x) = 3\cos^3 x$.

17 أجد $f''(x)$.

18 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x = a\cos t, y = b\sin t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$.

أجد المقطع $y$ لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة $a$ و $b$.

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث $a$ ثابت، و $a > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19 أجد إحداثيي النقطة $P$ التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون عندها ميل المماس 1

20 أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة $P$ في صورة: $x + y = k$، ثمَّ أجد قيمة الثابت $k$.

21 إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$، وكان:
$f(1) = 7, f'(1) = 4$، فأجد $h'(1)$.

22 إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$، فأُثبِت أنَّ:
$f''(x) = 4f(x)$.

23 إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$، فأُثبِت أنَّ:
$f''(x) + 16f(x) = 0$.

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:
$x = \sin^2 \theta, y = 2 \cos \theta$، حيث: $0 \le \theta \le 2\pi$:

24 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة $\theta$.

25 أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

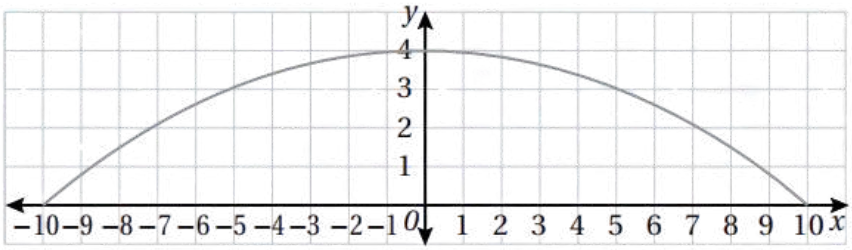
26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور $y$.

27 **سيّارة:** يُمثِّل الاقتران: $v(t) = 15t\,e^{-0.05t^2}$ سرعة (بالمتر لكل ثانية) سيّارة تتحرَّك في مسار مستقيم، حيث: $0 \le t \le 10$. أجد سرعة السيّارة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد $(f \circ g)'(x)$ عند قيمة $x$ المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

28 $f(u) = u^5 + 1,\ u = g(x) = \sqrt{x}\ ,\ x = 1$

29 $f(u) = u + \dfrac{1}{\cos^2 u}\ ,\ u = g(x) = \pi x,\ x = \dfrac{1}{4}$

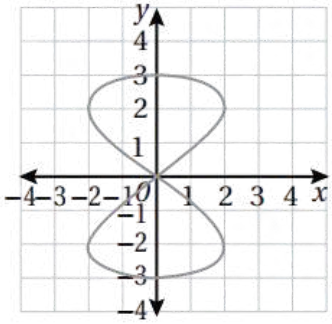



**مرور:** يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبٍّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور $x$ سطح الطريق، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.

إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10 \sin t,\ y = 2 + 2 \cos 2t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

30 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة $t$.

31 قيمة $t$ عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.




**32** **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t,\ y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

أكاديمية و مدارس أجيال العلم
Science Generations Academy

أكاديمية و مدارس أجيال العلم

# توجيهي 2008

## دفعة الطليعة