سلسلة

أجيال العلم

في الرياضيات

أكاديمية و مدارس أجيال العلم

Science Generations Academy

أكاديمية ومدارس أجيال العلم

الوحدة الخامسة

التكامل

رياضيات متقدم

إجابات الدرس الثاني

التكامل بالتعويض

التكامل بالتعويض
Integration by Substitution

التكامل بالتعويض

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن استعمال التكامل لإيجاد اقتران أصلي للاقتران المُكامَل، وذلك بالبحث عن اقتران مشتقته تعطي الاقتران المُكامَل. ولكنْ، لا يُمكِن إيجاد اقتران أصلي لبعض التكاملات مباشرة، مثل: $\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$؛ لذا نلجأ إلى طرائق أُخرى للتكامل، منها طريقة **التكامل بالتعويض** (integration by substitution)، التي تتضمَّن استعمال مُتغيِّر جديد بدلًا من مُتغيِّر التكامل.

> **أتذكَّر**
> لا توجد قاعدة لتكامل الضرب، أو تكامل القسمة.

يُمكِن إيجاد: $\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$ باستعمال مُتغيِّر جديد، وليكن u، بدلًا من المُتغيِّر x، باتِّباع الخطوات الآتية:

الخطوة 1: افتراض أنَّ u هو المقدار أسفل الجذر التربيعي؛ أيْ إنَّ: $u = x^2 + 6$.

الخطوة 2: إيجاد مشتقة u، وهي: $\frac{du}{dx} = 2x$.

الخطوة 3: حلُّ المعادلة لـ dx: $dx = \frac{du}{2x}$.

الخطوة 4: استعمال المُتغيِّر u بدلًا من المُتغيِّر x في التكامل.

> **أتعلَّم**
> عند استعمال التعويض لحلِّ التكامل، فإنَّ التكامل الجديد يجب أنْ يكون كله بدلالة المُتغيِّر الجديد.

$$\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx = \int 2x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$$ بتعويض $u = x^2+6,\ dx = \frac{du}{2x}$

$$= \int \sqrt{u}\,du$$ بالتبسيط

$$= \int u^{1/2}\,du$$ الصورة الأُسِّية

$$= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$ تكامل اقترانات القوَّة

$$= \frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2} + C$$ بتعويض $u = x^2 + 6$

> **أتعلَّم**
> يُمكِنني التحقُّق من صِحَّة إجابتي بإيجاد مشتقة الاقتران الأصلي باستعمال قاعدة السلسلة، ثُمَّ مقارنة الناتج بالاقتران المُكامَل:
> $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2}+C\right)$
> $= \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}(x^2+6)^{1/2}\times 2x$
> $= 2x\sqrt{x^2+6}$

أُلاحِظ من التكامل: $\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$ أنَّ $(2x)$ هو مشتقة (x^2+6). وبوجه عام، يُمكِن حلُّ أيِّ تكامل بطريقة التعويض إذا أمكن كتابته في صورة: $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$.

مفهوم أساسي — التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

إذا كان: $u = g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، ومداه الفترة I، وكان f اقترانًا مُتَّصِلًا على I، فإنَّ:

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = \int f(u)\, du$$

أتعلَّم
بوجه عام، إذا احتوى المُكامَل على اقتران ومشتقته، فإنَّه يُمكِن حلُّ التكامل بتعويض الاقتران.

يُمكِن تلخيص خطوات حلِّ التكامل بالتعويض على النحو الآتي:

مفهوم أساسي — خطوات حلِّ التكامل بالتعويض

الخطوة 1: تحديد التعويض u الذي يُمكِن به تبسيط المُكامَل.

الخطوة 2: التعبير عن المُكامَل بدلالة u و du، وحذف مُتغيِّر التكامل الأصلي ومشتقته حذفًا كاملًا، ثمَّ كتابة المُكامَل الجديد في أبسط صورة.

الخطوة 3: إيجاد التكامل الجديد.

الخطوة 4: التعبير عن الاقتران الأصلي الذي تمَّ إيجاده في الخطوة السابقة باستعمال المُتغيِّر الأصلي عن طريق التعويض.

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4\, dx$

أفترض أنَّ: $u = 2x^3 - 3$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{6x^2}$$

$$\int 6x^2 (2x^3 - 3)^4\, dx = \int 6x^2 (u)^4 \times \frac{du}{6x^2}$$ بتعويض $u = 2x^2 - 3,\ dx = \frac{du}{6x^2}$

$$= \int u^4\, du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{5} u^5 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{5} (2x^3 - 3)^5 + C$$ بتعويض $u = 2x^2 - 3$

أتعلَّم
لا أنسى عكس عملية التعويض بعد إجراء التكامل.

2 $\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \cos x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx = \int \sin x\, e^{u} \times \frac{du}{-\sin x}$$ بتعويض $u = \cos x,\ dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$= \int -e^{u}\, du$$ بالتبسيط

$$= -e^{u} + C$$ تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي المضروب في ثابت

$$= -e^{\cos x} + C$$ بتعويض $u = \cos x$

أتذكَّر

يُمكِنني التحقُّق من صِحَّة إجابتي بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل، ثُمَّ مقارنتها بالاقتران المُكامَل.

3 $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \ln x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dx = x\, du$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \frac{1}{x} \times \ln x\, dx$$ بإعادة كتابة المُكامَل

$$= \int \frac{1}{x} \times u \times x\, du$$ بتعويض $u = \ln x,\ dx = x\, du$

$$= \int u\, du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} u^2 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$ بتعويض $u = \ln x$

أتعلَّم

كتابة المُكامَل بصورة أُخرى تُسهِّل عملية التعويض.

4 $\int x^3 \cos(x^4 - 5)\, dx$

أفترض أنَّ: $u = x^4 - 5$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{4x^3}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

$$\int x^3 \cos(x^4-5)\,dx = \int x^3 \cos(u) \times \frac{du}{4x^3}$$ بتعويض $u = x^4 - 5,\ dx = \frac{du}{4x^3}$

$$= \int \frac{1}{4} \cos u\,du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{4} \sin u + C$$ تكامل $\cos u$ المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{4} \sin(x^4-5) + C$$ بتعويض $u = x^4 - 5$

5) $\int \sin^3 2x \cos 2x\,dx$

أفترض أنَّ: $u = \sin 2x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2\cos 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2\cos 2x}$$

$$\int \sin^3 2x \cos 2x\,dx = \int u^3 \cos 2x \times \frac{du}{2\cos 2x}$$ بتعويض $u = \sin 2x,\ dx = \frac{du}{2\cos 2x}$

$$= \int \frac{1}{2} u^3\,du$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4 + C$$ تكامل اقتران القوّة المضروب في ثابت

$$= \frac{1}{8} \sin^4 2x + C$$ بتعويض $u = \sin 2x$، والتبسيط

أتذكَّر

$\sin^3 2x = (\sin 2x)^3$

أُفكِّر

هل يُمكِن حلُّ التكامل في الفرع 5 من المثال 1 باستعمال التعويض: $u = \cos 2x$؟ أُبرِّر إجابتي.

6) $\int \frac{5^{1/x}}{x^2}\,dx$

أفترض أنَّ: $u = \frac{1}{x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad dx = -x^2\,du$$

$$\int \frac{5^{1/x}}{x^2}\,dx = \int \frac{5^u}{x^2} \times -x^2\,du$$ بتعويض $u = \frac{1}{x},\ dx = -x^2\,du$

$$= \int -5^u\,du$$ بالتبسيط

$$= -\frac{5^u}{\ln 5} + C$$ تكامل الاقتران الأُسّي المضروب في ثابت

$$= -\frac{5^{1/x}}{\ln 5} + C$$ بتعويض $u = \frac{1}{x}$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int 4x^2\sqrt{x^3-5}\ dx$

$$u = x^3 - 5 \ \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int 4x^2\sqrt{x^3-5}dx = \int 4x^2\sqrt{u} \times \frac{du}{3x^2}$$

$$= \int \frac{4}{3}u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{8}{9}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{8}{9}\sqrt{(x^3-5)^3} + C$$

b) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\ e^{\sqrt{x}}\ dx$

$$u = \sqrt{x} \ \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}du$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{u} \times 2\sqrt{x}du$$

$$= \int e^u du$$

$$= e^u + C$$

$$= e^{\sqrt{x}} + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

c) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow dx = x\,du$$

$$\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx = \int \frac{u^3}{x} \times x\,du$$

$$= \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C$$

d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow dx = x\,du$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int \frac{\cos u}{x} \times x\,du$$

$$= \int \cos u\,du$$

$$= \sin u + C$$

$$= \sin(\ln x) + C$$

e) $\int \cos^4 5x \sin 5x\,dx$

$$u = \cos 5x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -5\sin 5x \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{-5\sin 5x}$$

$$\int \cos^4 5x\ \sin 5x\,dx = \int u^4 \sin 5x \times \frac{du}{-5\sin 5x}$$

$$= \int -\frac{1}{5}u^4 du$$

$$= -\frac{1}{25}u^5 + C$$

$$= -\frac{1}{25}\cos^5 5x + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

f) $\int x\,2^{x^2}\,dx$

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x2^{x^2}dx = \int x2^u \times \frac{du}{2x}$$

$$= \int \frac{1}{2} 2^u du$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2^u}{\ln 2} + C$$

$$= \frac{1}{\ln 2} 2^{x^2-1} + C$$

أتعلَّم

لا يقتصـــر اســـتعمال التكامـــل بالتعويض على التكامـــلات التي تحوي اقترانًا ومشتقته.

من المُلاحَظ أنَّ مشـــتقة u في الأمثلة الســـابقة موجودة بصورة مباشـــرة في المُكامَل، إلّا أنَّ اســـتعمال التكامل بالتعويض لا يقتصر على هـــذه الحالة؛ إذ يُمكِن اســـتعمال التعويض في حالات أُخرى، لكنَّها تكون بحاجة إلى إجراءات إضافية باستعمال التعويض لتبسيط المُكامَل وكتابته كاملًا باستعمال المُتغيِّر الجديد.

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x\sqrt{2x+5}\,dx$

أفترض أنَّ: $u = 2x + 5$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

بكتابة x بدلالة u $u = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(u-5)$

بتعويض $u = 2x + 5, dx = \frac{du}{2}$ $\int x\sqrt{2x+5}\,dx = \int x \times u^{1/2} \times \frac{du}{2}$

بتعويض $x = \frac{1}{2}(u-5)$ $= \int \frac{1}{2}(u-5)\,u^{1/2} \times \frac{du}{2}$

بالتبسيط $= \frac{1}{4}\int (u^{3/2} - 5u^{1/2})\,du$

تكامل اقتران القوّة $= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{10}{3}u^{3/2}\right) + C$

بتعويض $u = 2x + 5$ $= \frac{1}{10}(2x+5)^{5/2} - \frac{5}{6}(2x+5)^{3/2} + C$

الصورة الجذرية $= \frac{1}{10}\sqrt{(2x+5)^5} - \frac{5}{6}\sqrt{(2x+5)^3} + C$

2 $\int x^5(1+x^2)^3\,dx$

أفترض أنَّ: $u = 1 + x^2$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

بكتابة x^2 بدلالة u $u = 1 + x^2 \Rightarrow x^2 = u - 1$

بتعويض $u = 1 + x^2, dx = \frac{du}{2x}$ $\int x^5(1+x^2)^3\,dx = \int x^5 \times u^3 \times \frac{du}{2x}$

بالتبسيط $= \frac{1}{2}\int x^4 \times u^3\,du$

بتعويض $x^2 = u - 1$ $= \frac{1}{2}\int (u-1)^2 \times u^3\,du$

بالتبسيط $= \frac{1}{2}\int (u^2 - 2u + 1) \times u^3\,du$

خاصية التوزيع $= \frac{1}{2}\int (u^5 - 2u^4 + u^3)\,du$

تكامل اقتران القوّة $= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}u^6 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{4}u^4\right) + C$

بتعويض $u = 1 + x^2$، والتبسيط $= \frac{1}{12}(1+x^2)^6 - \frac{1}{5}(1+x^2)^5 + \frac{1}{8}(1+x^2)^4 + C$

أتعلّم

ألاحِظ أنَّ مشتقة u هي ثابت (2)، وهذا يعني أنَّ المُتغيِّر x لا يُمكِن حذفه بالتبسيط مباشرة، وإنَّما يتطلَّب ذلك تنفيذ إجراءات أخرى؛ ما يدلُّ على وجوب كتابة x بدلالة u.

أتعلّم

ألاحِظ أنَّ مشتقة u هي $(2x)$، وهذا يعني أنَّ المُتغيِّر x لا يُمكِن حذفه بالتبسيط المباشر، وإنَّما يتطلَّب ذلك تنفيذ إجراءات أخرى؛ ما يدلُّ على وجوب كتابة x^2 بدلالة u.

أفكّر

هل يُمكِن حلُّ التكامل في الفرع 2 من المثال 2 بطريقة أخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

3 $\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$

أفترض أنَّ: $u = e^x + 1$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$u = e^x + 1 \Rightarrow e^x = u - 1$$ بكتابة e^x بدلالة u

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{u} \times \frac{du}{e^x}$$ بتعويض $u = e^x+1,\ dx = \frac{du}{e^x}$

$$= \int \frac{e^x}{u}\,du$$ بالتبسيط

$$= \int \frac{u-1}{u}\,du$$ بتعويض $e^x = u - 1$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du$$ بتوزيع المقام على كل حدٍّ في البسط

$$= u - \ln|u| + C$$ تكامل الثابت، وتكامل $\frac{1}{u}$

$$= (e^x + 1) - \ln|e^x + 1| + C$$ بتعويض $u = e^x + 1$

$$= e^x + 1 - \ln(e^x + 1) + C$$ $|e^x + 1| = e^x + 1$

أتذكَّر

$e^{2x} = (e^x)^2$

أفكِّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 3 من المثال 2 بطريقة أخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

$$u = 1 + 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2} \qquad , x = \frac{u-1}{2}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{u^{\frac{1}{2}}} \times \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}(1+2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(1+2x)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x} + C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

b) $\int x^7 (x^4 - 8)^3 \, dx$

$$u = x^4 - 8 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3} \qquad , x^4 = u + 8$$

$$\int x^7 (x^4 - 8)^3 dx = \int x^7 u^3 \times \frac{du}{4x^3}$$

$$= \frac{1}{4}\int x^4 u^3 du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u+8)u^3 du$$

$$= \frac{1}{4}\int (u^4 + 8u^3) du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}u^5 + 2u^4\right) + C$$

$$= \frac{1}{20}(x^4 - 8)^5 + \frac{1}{2}(x^4 - 8)^4 + C$$

c) $\int \frac{e^{3x}}{(1 - e^x)^2} \, dx$

$$u = 1 - e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{-e^x} \qquad , e^x = 1 - u$$

$$\int \frac{e^{3x}}{(1 - e^x)^2} dx = \int \frac{e^{3x}}{u^2} \times \frac{du}{-e^x}$$

$$= \int -\frac{e^{2x}}{u^2} du$$

$$= \int \frac{-(1-u)^2}{u^2} du$$

$$= \int \frac{-1 + 2u - u^2}{u^2} du$$

$$= \int \left(-u^{-2} + \frac{2}{u} - 1\right) du$$

$$= (u^{-1} + 2\ln|u| - u) + C$$

$$= \frac{1}{1 - e^x} + 2\ln|1 - e^x| - 1 + e^x + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

التكامل بالتعويض لتكاملات تحوي المقدار $\sqrt[n]{ax+b}$

يُمكِن استعمال التكامل بالتعويض عند وجود المقدار $\sqrt[n]{ax+b}$ في بعض التكاملات، وذلك بافتراض أنَّ: $u=\sqrt[n]{ax+b}$؛ بُغْيَةَ التخلُّص من الجذر.

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\displaystyle\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

أفترض أنَّ: $u=\sqrt{x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u=\sqrt{x} \Rightarrow u^2=x$$ بتربيع طرفي المعادلة

$$2u\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=2u\,du$$

$$\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}=\int \frac{2u}{u^2-u}\,du$$ بتعويض $u=\sqrt{x},\ u^2=x,\ dx=2u\,du$

$$=\int \frac{2}{u-1}\,du$$ بالتبسيط

$$=2\ln|u-1|+C$$ تكامل $\frac{1}{au+b}$

$$=2\ln|\sqrt{x}-1|+C$$ بتعويض $u=\sqrt{x}$

2 $\displaystyle\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx$

أفترض أنَّ: $u=\sqrt[5]{x+1}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$u=\sqrt[5]{x+1} \Rightarrow u^5=x+1$$ برفع طرفي المعادلة إلى الأُسِّ 5

$$5u^4\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=5u^4\,du$$

$$\int x\sqrt[5]{(x+1)^2}\,dx=\int (u^5-1)\,u^2\times 5u^4\,du$$ بتعويض $u=\sqrt[5]{x+1}$، $x=u^5-1,\ dx=5u^4\,du$

$$=5\int (u^{11}-u^6)\,du$$ خاصية التوزيع

$$=5\left(\frac{1}{12}u^{12}-\frac{1}{7}u^7\right)+C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$=\frac{5}{12}\sqrt[5]{(x+1)^{12}}-\frac{5}{7}\sqrt[5]{(x+1)^7}+C$$ بتعويض $u=\sqrt[5]{x+1}$، والتبسيط

أُفكِّر

عند اشتقاق $u^2=x$، فإنَّني أُطبِّق قواعد الاشتقاق الضمني.

أُفكِّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 1 من المثال 3 بإخراج $\sqrt{x}$ عاملًا مشتركًا من المقام، ثُمَّ التعويض؟ أُبرِّر إجابتي.

أتذكَّر

$\sqrt[5]{(x+1)^2}=\left(\sqrt[5]{x+1}\right)^2$

أُفكِّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 2 من المثال 3 بطريقة أخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$

$$u = \sqrt[3]{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow dx = 3x^{\frac{2}{3}}du \quad , \qquad x = u^3$$

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3x^{\frac{2}{3}}du}{u^3+u}$$

$$= \int \frac{3u^2}{u^3+u}du$$

$$= \int \frac{3u}{u^2+1}du$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du$$

$$= \frac{3}{2}\ln(u^2+1)+C$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)+C$$

b) $\int x\sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx$

$$u = 1-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du \quad , \qquad x = 1-u$$

$$\int x\sqrt[3]{(1-x)^2}\,dx = \int x\sqrt[3]{u^2} \times -du$$

$$= \int -(1-u)\sqrt[3]{u^2}\,du$$

$$= \int -(1-u)u^{\frac{2}{3}}du$$

$$= \int \left(-u^{\frac{2}{3}}+u^{\frac{5}{3}}\right)du$$

$$= -\frac{3}{5}u^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{8}u^{\frac{8}{3}}+C$$

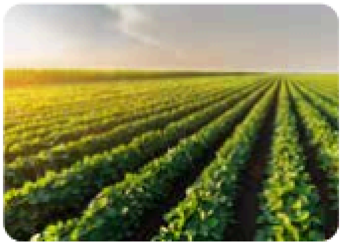
$$= -\frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{8}(1-x)^{\frac{8}{3}}+C$$

$$= -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(1-x)^5}+\frac{3}{8}\sqrt[3]{(1-x)^8}+C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الشرط الأوَّلي هو نقطة تُحقِّق الاقتران الأصلي، ويُمكِن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C، ويُمكِن بها أيضًا إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة.

مثال 4 : من الحياة



زراعة: يُمثِّل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية (بالدينار) بعد t سنة من الآن. إذا كان: $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سعر دونم الأرض، فأجد $V(t)$، علمًا بأنَّ سعر دونم الأرض الآن هو JD 5000.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $V'(t)$.

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}\, dt \qquad V(t) = \int V'(t)\, dt$$

أفترض أنَّ: $u = 0.2t^4 + 8000$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dt} = 0.8t^3 \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{du}{0.8t^3}$$

$$V(t) = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{0.2t^4 + 8000}}\, dt = \int \frac{0.4t^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{0.8t^3}$$ بتعويض $u = 0.2t^4 + 8000$, $dt = \frac{du}{0.8t^3}$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du$$ بالتبسيط، والصورة الأُسِّية

$$= u^{1/2} + C$$ تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت

$$= \sqrt{u} + C$$ الصورة الجذرية

$$= \sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$$ بتعويض $u = 0.2t^4 + 8000$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

$$V(t) = \sqrt{0.2t^4 + 8000} + C$$ قاعدة الاقتران

$$5000 = \sqrt{0.2(0)^4 + 8000} + C$$ بتعويض $t = 0,\ V(0) = 5000$

$$5000 = 40\sqrt{5} + C$$ بالتبسيط

$$C = 5000 - 40\sqrt{5}$$ بحلِّ المعادلة

إذن، اقتران سعر دونم الأرض بعد t سنة من الآن هو:

$$V(t) = \sqrt{0.2t^4 + 8000} + 5000 - 40\sqrt{5}.$$

معلومة

تُستعمَل تقنية النانو لاستصلاح الأراضي الصحراوية وجعلها صالحة للزراعة، وذلك بزيادة درجة تشبُّع التربة ومحتواها من الرطوبة، وزيادة تماسكها.

أُفكِّر

هل يُمكِن حلُّ المثال 4 بطريقة أُخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر قطعة (بالدينار) تُستعمَل في أجهزة الحاسوب، حيث x عدد القطع المَبيعة منها بالمئات. إذا كان: $p'(x) = \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل تغيُّر سعر هذه القطعة، فأجد $p(x)$، علمًا بأنَّ سعر بيع القطعة الواحدة هو JD 30 عندما يكون عدد القطع المَبيعة منها 400 قطعة.

أتعلَّم

العدد 400 في المسألة يعني أنَّ $x = 4$.

$$p(x) = \int \frac{-135x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$$

$$u = 9 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$p(x) = \int \frac{-135x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{-135}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -135u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$p(x) = -135\sqrt{9+x^2} + C$$

$$p(4) = -135\sqrt{9+16} + C = -135(5) + C$$

$$30 = -675 + C \Rightarrow C = 705$$

$$p(x) = 705 - 135\sqrt{9+x^2}$$

التكامل بالتعويض لاقترانات تتضمَّن اقتراني الجيب وجيب التمام المرفوعين إلى أسٍّ فردي

تعلَّمْتُ في الدرس السابق إيجاد تكامل اقتراني الجيب وجيب التمام المرفوعين إلى أسٍّ زوجي باستعمال متطابقات تقليص القوَّة، وتعلَّمْتُ أيضًا إيجاد تكامل الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب، أو اقتراني جيب تمام، أو اقتران جيب في اقتران جيب تمام.

أمّا بالنسبة إلى التكاملات التي تحوي اقتراني جيب وجيب تمام مرفوعين إلى أسٍّ فردي فيُمكِن استعمال التعويض لإيجادها، إضافةً إلى استعمال المتطابقة المثلثية الآتية: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

مثال 5

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1 $\int \cos^3 x\, dx$

$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx$ بتحليل $\cos^3 x$ إلى $\cos^2 x \cos x$

$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$ متطابقات فيثاغورس

أفترض أنَّ: $u = \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

إذن:

$\int \cos^3 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$

$= \int \left(1 - u^2\right) \cos x \times \frac{du}{\cos x}$ بتعويض $u = \sin x,\ dx = \frac{du}{\cos x}$

$= \int \left(1 - u^2\right) du$ بالتبسيط

$= u - \frac{1}{3} u^3 + C$ تكامل اقتران القوَّة، وتكامل الثابت

$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$ بتعويض $u = \sin x$

أتعلَّم

إنَّ تحليل $\cos^3 x$، واستعمال متطابقة فيثاغورس، يُسهِّلان عملية التعويض، وظهور التكامل في الصورة الآتية: $\int f(g(x))\, g'(x) dx$.

أتعلَّم

يُمكِن البدء بالتعويض، ثمَّ استعمال متطابقة فيثاغورس.

2 $\int \cos^4 x \sin^3 x\, dx$

أفترض أنَّ: $u = \cos x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

إذن:

$$\int \cos^4 x \sin^3 x \, dx = \int u^4 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x}$$ بتعويض $u = \cos x, \, dx = \frac{du}{-\sin x}$

$$= -\int u^4 \sin^2 x \, du$$ بالتبسيط

$$= -\int u^4 (1 - \cos^2 x) \, du$$ متطابقات فيثاغورس

$$= -\int u^4 (1 - u^2) \, du$$ بالتعويض

$$= -\int \left(u^4 - u^6\right) du$$ بالتبسيط

$$= -\left(\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7\right) + C$$ تكامل اقتران القوّة

$$= -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$$ بتعويض $u = \cos x$

أفكّر

هل يُمكِن حلّ الفرع 2 من المثال 5 بتحويل $\cos^2 x$ إلى $1 - \sin^2 x$؟ أبرّر إجابتي.

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \sin^3 x \, dx$

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \sin^2 x \, dx = \int \sin x \, (1 - \cos^2 x)dx$$

$$u = \cos x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \, (1 - u^2) \frac{du}{-\sin x}$$

$$= \int (u^2 - 1)du$$

$$= \frac{1}{3} u^3 - u + C$$

$$= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$$

أتعلّم

- إذا كان أُسّ كلٍّ من الجيب وجيب التمام زوجيًّا، فأستعمل متطابقات تقليص القوّة لحلّ التكامل.
- إذا كان أحد الاقترانين مرفوعًا إلى أُسٍّ فردي، فأُعوّض الاقتران الآخر.
- إذا كان كلا الاقترانين مرفوعًا إلى أُسٍّ فردي، فأُعوّض الاقتران الذي أُسُّه أكبر.

b) $\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \ \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \cos^5 x \sin^2 x \, dx = \int \cos^5 x \, u^2 \frac{du}{\cos x}$$
$$= \int \cos^4 x \, u^2 \, du$$
$$= \int (1 - \sin^2 x)^2 \, u^2 \, du$$
$$= \int (1 - u^2)^2 \, u^2 \, du$$
$$= \int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du$$
$$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{7}u^7 + C$$
$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

التكامل بالتعويض لاقترانات تتضمّن الظلّ، أو ظلّ التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام

يُمكِن استعمال التكامل بالتعويض لإيجاد تكاملات تحوي اقتران الظلّ، أو اقتران ظلّ التمام، أو القاطع، أو قاطع التمام، وتكون جميعها مرفوعة إلى أُسٍّ صحيح موجب، إضافةً إلى استعمال المتطابقتين المثلثيتين: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$، و $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.

مثال 6

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \tan^3 x \, dx$

$$\int \tan^3 x \, dx = \int \tan^2 x \tan x \, dx$$ بتحليل $\tan^3 x$ إلى $\tan^2 x \tan x$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \, dx$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \int (\sec^2 x \tan x - \tan x) \, dx$$ خاصية التوزيع

$$= \int \sec^2 x \tan x \, dx - \int \tan x \, dx$$ تكامل الفرق

للتكامل الأوّل، أفترض أنَّ: $u = \tan x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

أتعلّم

إنَّ تحليل $\tan^3 x$، واستعمال متطابقة فيثاغورس، يُسهِّلان عملية التعويض، وظهور التكامل في الصورة الآتية: $\int f(g(x)) \, g'(x) \, dx$.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

إذن:

$$\int \tan^3 x\,dx = \int \sec^2 x \tan x\,dx - \int \tan x\,dx$$

$$= \int \sec^2 x \times u \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int \tan x\,dx$$ بتعويض $u = \tan x,\ dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$= \int u\,du - \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$ بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}u^2 + \ln|\cos x| + C$$ تكامل اقتران القوّة، وتكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$ بتعويض $u = \tan x$

2 $\int \cot^4 x\,dx$

$$\int \cot^4 x\,dx = \int \cot^2 x \cot^2 x\,dx$$ بتحليل $\cot^4 x$ إلى $\cot^2\ \cot^2 x$

$$= \int \cot^2 x(\csc^2 x - 1)\,dx$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \int (\cot^2 x \csc^2 x - \cot^2 x)\,dx$$ خاصية التوزيع

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x\,dx - \int \cot^2 x\,dx$$ تكامل الفرق

للتكامل الأوّل، أفترض أنَّ: $u = \cot x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

إذن:

$$\int \cot^4 x\,dx = \int \cot^2 x \csc^2 x\,dx - \int \cot^2 x\,dx$$

$$= \int u^2 \times \csc^2 x \times \frac{du}{-\csc^2 x} - \int (\csc^2 x - 1)\,dx$$ بتعويض $u = \cot x,\ dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$

$$= -\int u^2 \times du - \int (\csc^2 x - 1)\,dx$$ بالتبسيط

$$= -\frac{1}{3}u^3 + \cot x + x + C$$ تكامل اقتران القوّة، وتكامل $\csc^2 x$

$$= -\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C$$ بتعويض $u = \cot x$

أفكّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 1 من المثال 6 بطريقة أخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتعلّم

لحلّ التكامل: $\int \cot^n x\,dx$، إذا كانت $n \geq 4$، حيث n عدد زوجي، أكتب التكامل في الصورة الآتية:

$$\int \cot^n x\,dx = \int \cot^{n-2} x(\csc^2 x - 1)\,dx$$

أخطاء شائعة

يُخطِئ بعض الطلبة أثناء الحلّ، وذلك بعدم توزيع الإشارة السالبة التي تسبق التكامل: $\int (\csc^2 x - 1)\,dx$ على كل حدٍّ من حدود الاقتران الأصلي الناتج.

3 $\int \sec^4 x \tan^3 x \, dx$

أفترض أنَّ: $u = \tan x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

إذن:

$$\int \sec^4 x \tan^3 x \, dx = \int \sec^4 x \times u^3 \times \frac{du}{\sec^2 x}$$ بتعويض $u = \tan x, dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$$= \int \sec^2 x \times u^3 \, du$$ بالتبسيط

$$= \int (1 + \tan^2 x) \, u^3 \, du$$ متطابقات فيثاغورس

$$= \int (1 + u^2) u^3 \, du$$ بالتبسيط

$$= \int (u^3 + u^5) \, du$$ خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{6} u^6 + C$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{6} \tan^6 x + C$$ بتعويض $u = \tan x$

أُفكِّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 3 من المثال 6 بافتراض أنَّ: $u = \sec x$؟ أُبرِّر إجابتي.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \tan^4 x \, dx$

$$\int \tan^4 x \, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x \, dx$$
$$= \int \tan^2 x \, (\sec^2 x - 1) dx$$
$$= \int \tan^2 x \sec^2 x - \tan^2 x \, dx$$
$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^2 x \, dx$$
$$= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$
$$\Rightarrow \int \tan^4 x \, dx = \int u^2 \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x} - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$
$$= \int u^2 du - \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$
$$= \frac{1}{3} u^3 - \tan x + x + C$$
$$= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$$

b) $\int \cot^5 x \, dx$

$$\int \cot^5 x \, dx = \int \cot x \cot^4 x \, dx$$
$$= \int \cot x \, (\cot^2 x)^2 \, dx$$
$$= \int \cot x \, (\csc^2 x - 1)^2 \, dx$$
$$u = \csc x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc x \cot x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc x \cot x}$$
$$\Rightarrow \int \cot^5 x \, dx = \int \cot x \, (u^2 - 1)^2 \times \frac{du}{-\csc x \cot x}$$
$$= \int (u^2 - 1)^2 \, \frac{du}{-u}$$
$$= \int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{-u} \, du$$
$$= \int \left(-u^3 + 2u - \frac{1}{u}\right) \, du$$
$$= -\frac{1}{4} u^4 + u^2 - \ln|u| + C$$
$$= -\frac{1}{4} \csc^4 x + \csc^2 x - \ln|\csc x| + C$$

حلّ ثانٍ:

$$\int \cot^5 x \, dx = \int \cot^3 x \cot^2 x \, dx$$
$$= \int \cot^3 x \, (\csc^2 x - 1) \, dx$$
$$= \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx - \int \cot^3 x \, dx$$
$$= \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx - \int \cot x \cot^2 x \, dx$$
$$= \int \cot^3 x \csc^2 x \, dx - \int \cot x (\csc^2 x - 1) \, dx$$
$$= \int (\cot^3 x - \cot x) \csc^2 x \, dx + \int \cot x \, dx$$

في التكامل الأول افرض $u = \cot x$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$
$$\int \cot^5 x \, dx = \int (u^3 - u) \csc^2 x \, \frac{du}{-\csc^2 x} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \int (u - u^3) \, du + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{4} u^4 + \ln|\sin x| + C$$
$$= \frac{1}{2} \cot^2 x - \frac{1}{4} \cot^4 x + \ln|\sin x| + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

c) $\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx$

$$u = \tan x \implies \frac{du}{dx} = \sec^2 x \implies dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \sec^4 x \tan^6 x \, dx = \int \sec^4 x \, u^6 \times \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x \, u^6 \, du$$

$$= \int (1 + \tan^2 x) \, u^6 \, du$$

$$= \int (1 + u^2) \, u^6 \, du$$

$$= \int (u^6 + u^8) \, du$$

$$= \frac{1}{7} u^7 + \frac{1}{9} u^9 + C$$

$$= \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

توجد طريقتان لإيجاد قيمة تكامل محدود بالتعويض؛ إحداهما: إيجاد التكامل أوّلًا بدلالة المُتغيِّر الأصلي، ثمَّ تعويض حدود التكامل، والأُخرى: تغيير حدود التكامل عند تغيير مُتغيِّر التكامل، وهذه الطريقة هي أكثر تفضيلًا.

مفهوم أساسي

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

إذا كان g' مُتَّصِلًا على $[a, b]$، وكان f مُتَّصِلًا على مدى $u = g(x)$، فإنَّ:

$$\int_a^b f(g(x)) \, g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

مثال 7

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

1 $\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\sin x}\, dx$

- أفترض أنَّ: $u = 1 + \sin x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي	الحدُّ السفلي
$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$	$x = 0 \Rightarrow u = 1 + \sin(0) = 1$

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\sin x}\, dx = \int_1^2 \cos x \sqrt{u}\, \frac{du}{\cos x}$$ بتعويض $u = 1+\sin x$, $dx = \frac{du}{\cos x}$

$$= \int_1^2 \sqrt{u}\, du$$ بالتبسيط

$$= \int_1^2 u^{1/2}\, du$$ الصورة الأُسِّية

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^2$$ تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} \Big|_1^2$$ الصورة الجذرية

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{2^3} - \sqrt{1^3}\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$$ بالتبسيط

2 $\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx$

- أفترض أنَّ: $u = \sqrt{2x-1}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

بتربيع طرفي المعادلة $u = \sqrt{2x-1} \Rightarrow u^2 = 2x - 1$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(u^2 + 1)$$

$$2u\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = u\, du$$

- أُغيِّر حدود التكامل:

الحدُّ العلوي	الحدُّ السفلي
$x = 25 \Rightarrow u = \sqrt{2(25) - 1} = 7$	$x = 1 \Rightarrow u = \sqrt{2(1) - 1} = 1$

بتعويض $u = \sqrt{2x-1}$، $x = \frac{1}{2}(u^2+1), dx = udu$

$$\int_1^{25} \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx = \int_1^7 \frac{1}{2} \times \frac{u^2+1}{u} \times u\, du$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}\int_1^7 (u^2 + 1)\, du$$

تكامل اقتران القوَّة

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u^3 + u\right)\Big|_1^7$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}(7)^3 + 7\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 1\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 60$$

أفكِّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 2 من المثال 7 بطريقة أخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

أتعلَّم

لا يجوز أنْ تحتوي فترة حدود التكامل على أيٍّ صفر من أصفار المقام.

أتحقّق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int_0^2 x(x+1)^3\, dx$

$u = x+1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du,\ x = u-1$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 2 \Rightarrow u = 3$

$$\int_0^2 x(x+1)^3 dx = \int_1^3 (u-1)u^3 du$$

$$= \int_1^3 (u^4 - u^3) du$$

$$= \left(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{4}u^4\right)\Big|_1^3$$

$$= \frac{1}{5}(3)^5 - \frac{1}{4}(3)^4 - \left(\frac{1}{5}(1)^5 - \frac{1}{4}(1)^4\right)$$

$$= \frac{142}{5} = 28.4$$

b) $\int_0^{\pi/3} \sec x\ \tan x \sqrt{\sec x + 2}\ dx$

$u = \sec x + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec x \tan x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec x \tan x}$

$x = 0 \Rightarrow u = 3$

$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = 4$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \sqrt{\sec x + 2} dx = \int_3^4 \sec x \tan x \sqrt{u} \frac{du}{\sec x \tan x}$$

$$= \int_3^4 \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_3^4$$

$$= \frac{2}{3}(8 - 3\sqrt{3}) \approx 1.87$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int x^2 (2x^3+5)^4 \, dx$

$$u = 2x^3+5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{6x^2}$$

$$\int x^2(2x^3+5)^4 dx = \int x^2 u^4 \times \frac{du}{6x^2}$$

$$= \int \frac{1}{6} u^4 \, du$$

$$= \frac{1}{30} u^5 + C$$

$$= \frac{1}{30}(2x^3+5)^5 + C$$

2 $\int x^2 \sqrt{x+3} \, dx$

$$u = x+3 \Rightarrow dx = du \quad , x = u-3$$

$$\int x^2\sqrt{x+3}\, dx = \int x^2\sqrt{u}\, du$$

$$= \int (u-3)^2\sqrt{u}\, du$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + 9u^{\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}u^{\frac{5}{2}} + 6u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}(x+3)^{\frac{7}{2}} - \frac{12}{5}(x+3)^{\frac{5}{2}} + 6(x+3)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{(x+3)^7} - \frac{12}{5}\sqrt{(x+3)^5} + 6\sqrt{(x+3)^3} + C$$

3 $\int x(x+2)^3 \, dx$

$$u = x+2 \Rightarrow dx = du \quad , x = u-2$$

$$\int x(x+2)^3 dx = \int x u^3 du$$

$$= \int (u-2)u^3 \, du$$

$$= \int (u^4 - 2u^3)\, du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{2}u^4 + C$$

$$= \frac{1}{5}(x+2)^5 - \frac{1}{2}(x+2)^4 + C$$

4 $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx$

$u = x + 4 \Rightarrow dx = du \quad , x = u - 4$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\,du$$
$$= \int \frac{u-4}{\sqrt{u}}\,du$$
$$= \int \left(u^{\frac{1}{2}} - 4u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$
$$= \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 8u^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} - 8(x+4)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 8\sqrt{x+4} + C$$

5 $\int e^{\sin x} \cos x\,dx$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$
$$\int e^{\sin x} \cos x\,dx = \int e^{u} \cos x \frac{du}{\cos x}$$
$$= \int e^{u} du$$
$$= e^{u} + C$$
$$= e^{\sin x} + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

6 $\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx$

$$u = e^x + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} \quad , e^x = u - 1$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx = \int \frac{e^{3x}}{u} \times \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^{2x}}{u} du$$

$$= \int \frac{(u-1)^2}{u} du$$

$$= \int \left(u - 2 + \frac{1}{u}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}u^2 - 2u + \ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{2}(e^x+1)^2 - 2(e^x+1) + \ln(e^x+1) + C$$

7 $\int \sec^4 x\, dx$

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x \times \sec^2 x\, dx = \int \sec^2 x\,(1 + \tan^2 x)dx$$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \sec^4 x\, dx = \int \sec^2 x\,(1+u^2) \times \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int (1+u^2)\, du$$

$$= u + \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

8 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x \sec^2 x \, dx$$

$$u = \tan x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int u \sec^2 x \times \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int u \, du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + C$$

$$= \frac{1}{2} \tan^2 x + C$$

9 $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \, du$$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times x \, du$$

$$= \int \sin u \, du$$

$$= -\cos u + C$$

$$= -\cos(\ln x) + C$$

10 $\int \sin 2x\,(4+\sin^2 x)^3\,dx$

$$u = 4+\sin^2 x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

$$\Rightarrow dx = \frac{du}{\sin 2x}$$

$$\int \sin 2x(4+\sin^2 x)^3\,dx = \int \sin 2x \times u^3 \times \frac{du}{\sin 2x}$$

$$= \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C$$

$$= \frac{(4+\sin^2 x)^4}{4} + C$$

11 $\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}\,dx$

$$u = e^x + e^{-x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x - e^{-x} \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x - e^{-x}}$$

$$\int \frac{2e^x - 2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}dx = \int \frac{2(e^x-e^{-x})}{u^2} \times \frac{du}{e^x - e^{-x}}$$

$$= \int 2u^{-2}du$$

$$= -2u^{-1} + C$$

$$= -\frac{2}{e^x+e^{-x}} + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

12 $\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}\,dx$

$u = x + 1 \quad \Rightarrow dx = du\,,\ \ x = u - 1$

$$\int \frac{-x}{(x+1)\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{1-u}{u\sqrt{u}}du$$
$$= \int \frac{1-u}{u^{\frac{3}{2}}}du$$
$$= \int \left(u^{-\frac{3}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$
$$= -2u^{-\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= -2(x+1)^{-\frac{1}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{x+1}} - 2\sqrt{x+1} + C$$

ملاحظة: يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها بافتراض $u = \sqrt{x+1}$.

13 $\int x\,\sqrt[3]{x+10}\,dx$

$u = x + 10 \quad \Rightarrow dx = du \quad ,x = u - 10$

$$\int x\,\sqrt[3]{x+10}\,dx = \int (u-10)u^{\frac{1}{3}}\,du$$
$$= \int \left(u^{\frac{4}{3}} - 10u^{\frac{1}{3}}\right)du$$
$$= \frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2}u^{\frac{4}{3}} + C$$
$$= \frac{3}{7}(x+10)^{\frac{7}{3}} - \frac{15}{2}(x+10)^{\frac{4}{3}} + C$$
$$= \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+10)^7} - \frac{15}{2}\sqrt[3]{(x+10)^4} + C$$

ملاحظة: يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها بافتراض $u = \sqrt[3]{x+10}$.

14 $\int \left(\sec^2 \frac{x}{2} \tan^7 \frac{x}{2}\right) dx$

$$u = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$\int \sec^2\frac{x}{2}\tan^7\frac{x}{2}\,dx = \int \sec^2\frac{x}{2}\,u^7 \times \frac{2du}{\sec^2\frac{x}{2}}$$

$$= 2\int u^7\,du$$

$$= \frac{1}{4}u^8 + C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^8\frac{x}{2} + C$$

15 $\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}\,dx$

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}dx = \int(\sec^2 x + \cos x\, e^{\sin x})dx$$

$$= \int \sec^2 x\,dx + \int \cos x\, e^{\sin x}dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\sec^3 x + e^{\sin x}}{\sec x}dx = \int \sec^2 x\,dx + \int \cos x\, e^u \times \frac{du}{\cos x}$$

$$= \tan x + \int e^u du$$

$$= \tan x + e^u + C$$

$$= \tan x + e^{\sin x} + C$$

16 $\int (1+\sqrt[3]{\sin x})\cos^3 x\, dx$

$$u=\sin x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\cos x \Rightarrow dx=\frac{du}{\cos x}$$

$$\int (1+\sqrt[3]{\sin x})\cos^3 x\, dx=\int\left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)\cos^3 x\,\frac{du}{\cos x}$$

$$=\int\left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)\cos^2 x\, du$$

$$=\int\left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)(1-\sin^2 x)\, du$$

$$=\int\left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)(1-u^2)\, du$$

$$=\int\left(1+u^{\frac{1}{3}}\right)(1-u^2)\, du$$

$$=\int\left(1-u^2+u^{\frac{1}{3}}-u^{\frac{7}{3}}\right) du$$

$$=u-\frac{1}{3}u^3+\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}-\frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}}+C$$

$$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+\frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}} x-\frac{3}{10}\sin^{\frac{10}{3}} x+C$$

17 $\int \sin x \sec^5 x \, dx$

$$\int \sin x \sec^5 x \, dx = \int \sin x \cos^{-5} x \, dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$\int \sin x \sec^5 x \, dx = \int \sin x \, u^{-5} \times \frac{du}{-\sin x}$$

$$= -\int u^{-5} \, du$$

$$= \frac{1}{4} u^{-4} + C$$

$$= \frac{1}{4} \cos^{-4} x + C$$

$$= \frac{1}{4} \sec^4 x + C$$

18 $\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} \, dx$

$$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} \, dx = \int (\tan x \sec^2 x + \tan x \sec^3 x) \, dx$$

$$= \int \tan x \sec x \, (\sec x + \sec^2 x) \, dx$$

$$u = \sec x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \tan x \sec x \Rightarrow dx = \frac{du}{\tan x \sec x}$$

$$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos^3 x} \, dx = \int \tan x \sec x \, (u + u^2) \, \frac{du}{\tan x \sec x}$$

$$= \int (u + u^2) \, du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{3} u^3 + C$$

$$= \frac{1}{2} \sec^2 x + \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

19 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x}\, dx$

$$u = \pi \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow dx = \frac{x\,du}{\pi}$$

$$x = 1 \Rightarrow u = \pi \ln 1 = 0$$

$$x = \sqrt{e} \Rightarrow u = \pi \ln \sqrt{e} = \pi \times \frac{1}{2} \ln e = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sin(\pi \ln x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{x} \times \frac{x\,du}{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\, du$$

$$= \frac{-1}{\pi} \cos u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{-1}{\pi} (\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0)$$

$$= \frac{-1}{\pi} (0 - 1) = \frac{1}{\pi}$$

20 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x \sin x^2\, dx$

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \frac{\pi^2}{4}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x^2\, dx = \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} x \sin u \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin u\, du$$

$$= -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^{\frac{\pi^2}{4}}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\cos \frac{\pi^2}{4} - 1\right) \approx 0.891$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

21 $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

$u = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \quad , \quad x^2 = u - 1$

$x = 0 \Rightarrow u = 1$

$x = 1 \Rightarrow u = 2$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_1^2 \frac{x^3}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u-1}{\sqrt{u}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - 2(2)^{\frac{1}{2}} - (\frac{2}{3}(1) - 2(1))\right)$$

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

22 $\int_0^{\pi/3} \sec^2 x \tan^5 x \, dx$

$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \sqrt{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x \tan^5 x\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \sec^2 x\, u^5 \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} u^5\, du$$

$$= \frac{1}{6}u^6\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{9}{2}$$

23 $\int_1^3 (x-1)e^{(x-1)^2}\,dx$

$$u=(x-1)^2 \Rightarrow \frac{du}{dx}=2(x-1) \Rightarrow dx=\frac{du}{2(x-1)}$$

$$x=1 \Rightarrow u=0$$

$$x=3 \Rightarrow u=4$$

$$\int_0^2 (x-1)e^{(x-1)^2}dx=\int_0^4 (x-1)e^u\frac{du}{2(x-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 e^u du=\frac{1}{2}e^u\Big|_0^4$$

$$=\frac{e^4-1}{2}$$

24 $\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

$$u=2+\sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx=2\sqrt{x}\,du$$

$$x=1 \Rightarrow u=3$$

$$x=4 \Rightarrow u=4$$

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{2+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int_3^4 \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{x}}2\sqrt{x}\,du=\int_3^4 2\sqrt{u}\,du=\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_3^4=\frac{4(8-3\sqrt{3})}{3}$$

25 $\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}\,dx$

$$u=1+x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dx=\frac{2\,du}{3\,x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2du}{3\sqrt{x}}$$

$$x=0 \Rightarrow u=1$$

$$x=1 \Rightarrow u=2$$

$$\int_0^1 \frac{10\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x^3})^2}dx=\int_1^2 \frac{10\sqrt{x}}{u^2}\times\frac{2du}{3\sqrt{x}}$$

$$=\frac{20}{3}\int_1^2 u^{-2}\,du=-\frac{20}{3}u^{-1}\Big|_1^2=\frac{10}{3}$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

26 $\int_0^{\pi/6} 2^{\cos x} \sin x \, dx$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2^{\cos x} \sin x \, dx = \int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u \sin x \frac{du}{-\sin x}$$

$$= -\int_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2^u \, du$$

$$= -\frac{2^u}{\ln 2}\Big|_1^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\ln 2}\left(2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - 2\right) \approx 0.256$$

27 $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \csc^2 x \cot^5 x \, dx$

$$u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \cot^5 x \, dx = \int_1^0 \csc^2 x \, u^5 \frac{du}{-\csc^2 x}$$

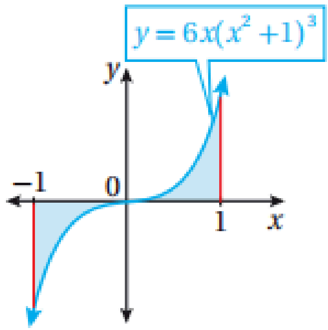
$$= \int_1^0 -u^5 \, du$$

$$= -\frac{1}{6}u^6\Big|_1^0$$

$$= \frac{1}{6}$$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

28



$$A = -\int_{-1}^{0} 6x(x^2+1)^3 dx + \int_{0}^{1} 6x(x^2+1)^3 dx$$

$$u = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow u = 2$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow u = 2$$

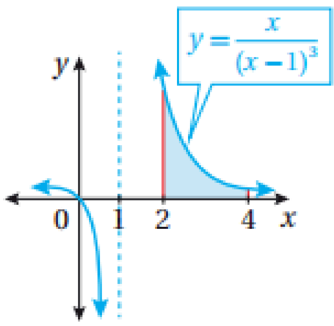
$$A = -\int_{2}^{1} 6xu^3 \frac{du}{2x} + \int_{1}^{2} 6xu^3 \frac{du}{2x}$$

$$= \int_{1}^{2} 3u^3 du + \int_{1}^{2} 3u^3 du = \int_{1}^{2} 6u^3 du$$

$$= \frac{6}{4}u^4 \Big|_1^2$$

$$= \frac{45}{2}$$

29



$$A = \int_{2}^{4} \frac{x}{(x-1)^3} dx$$

$$u = x - 1 \quad \Rightarrow dx = du \qquad , \quad x = u + 1$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow u = 1$$

$$x = 4 \quad \Rightarrow u = 3$$

$$A = \int_{2}^{4} \frac{x}{(x-1)^3} dx = \int_{1}^{3} \frac{u+1}{u^3} du$$

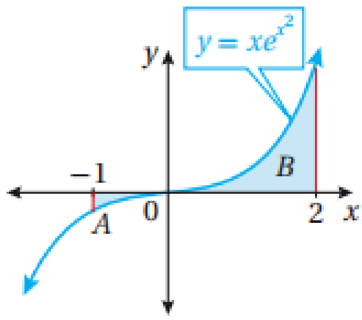
$$= \int_{1}^{3} (u^{-2} + u^{-3}) du = \left(-u^{-1} - \frac{1}{2}u^{-2}\right)\Big|_1^3$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right) + 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{10}{9}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

30



$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$x = -1 \Rightarrow u = 1$

$x = 0 \Rightarrow u = 0$

$x = 2 \Rightarrow u = 4$

$$A = -\int_{-1}^{0} xe^{x^2} dx + \int_{0}^{2} xe^{x^2} dx = -\int_{1}^{0} xe^{u} \frac{du}{2x} + \int_{0}^{4} xe^{u} \frac{du}{2x}$$

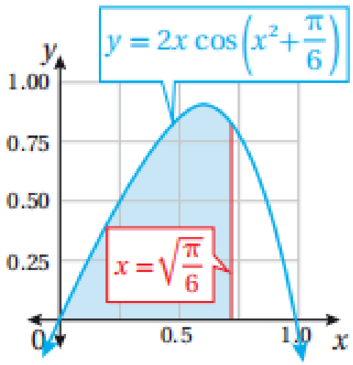
$$= -\int_{1}^{0} \frac{1}{2} e^{u} du + \int_{0}^{4} \frac{1}{2} e^{u} du$$

$$= -\frac{1}{2} e^{u}\Big|_{1}^{0} + \frac{1}{2} e^{u}\Big|_{0}^{4}$$

$$= -\frac{1}{2} e^{0} + \frac{1}{2} e^{1} + \frac{1}{2} e^{4} - \frac{1}{2} e^{0}$$

$$= \frac{1}{2}(e^4 + e) - 1 \approx 27.658$$

31



$$u = x^2 + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$x = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3}$

$x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{6}$

$$A = \int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{6}}} 2x \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{6}\right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2x \cos u \frac{du}{2x}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos u \, du$$

$$= \sin u \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \approx 0.366$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

في كلٍّ ممّا يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y=f(x)$. أسـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

32 $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2 \ ; (2, 10)$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2x(4x^2-10)^2\,dx$$

$$u = 4x^2 - 10 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 8x \Rightarrow dx = \frac{du}{8x}$$

$$f(x) = \int 2xu^2 \frac{du}{8x} = \int u^2 \frac{du}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int u^2\,du$$

$$= \frac{1}{12}u^3 + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2-10)^3 + C$$

$$f(2) = \frac{1}{12}(216) + C$$

$$10 = 18 + C \quad \Rightarrow C = -8$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{12}(4x^2-10)^3 - 8$$

33 $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3} \ ; (0, \frac{3}{2})$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int x^2 e^{-0.2x^3}dx$$

$$u = -0.2x^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -0.6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{-0.6x^2}$$

$$f(x) = \int x^2 e^u \frac{du}{-0.6x^2} = -\frac{10}{6}\int e^u\,du$$

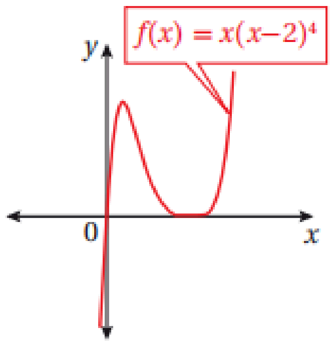
$$= -\frac{5}{3}e^u + C$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3}e^{-0.2x^3} + C$$

$$f(0) = -\frac{5}{3} + C$$

$$\frac{3}{2} = -\frac{5}{3} + C \quad \Rightarrow C = \frac{19}{6}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{5}{3}e^{-0.2x^3} + \frac{19}{6}$$



يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = x(x-2)^4$:

34 أجد إحداثيي نقطة تماس الاقتران مع المحور x.

نجد أصفار الاقتران بحل المعادلة $f(x) = 0$

$$x(x-2)^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad , x = 2$$

نقطة التقاطع $(0,0)$ ، فتكون نقطة التماس $(2,0)$

ويمكن التحقق بحساب $f'(2)$: $f'(x) = (x-2)^4 + 4x(x-2)^3$

$$f'(2) = (2-2)^4 + 4(2)(2-2)^3 = 0$$

35 أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x.

$$A = \int_0^2 x(x-2)^4\, dx$$

$$u = x - 2 \quad \Rightarrow dx = du \quad , \quad x = u + 2$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow u = -2$$

$$x = 2 \quad \Rightarrow u = 0$$

$$A = \int_0^2 x(x-2)^4\, dx = \int_{-2}^0 (u+2)u^4\, du$$

$$= \int_{-2}^0 (u^5 + 2u^4)\, du = \left(\frac{1}{6}u^6 + \frac{2}{5}u^5\right)\Big|_{-2}^0$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{6}(-2)^6 + \frac{2}{5}(-2)^5\right) = \frac{32}{15}$$

36 يتحرَّك جُسَيْم في مســـار مستقيم، وتعطى ســـرعته بالاقتران: $v(t) = \sin \omega t \cos^2 \omega t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية، و ω ثابت. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية.

$$s(t) = \int \sin \omega t \, \cos^2 \omega t \, dt$$

$$u = \cos \omega t \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\omega \sin \omega t \Rightarrow dt = \frac{du}{-\omega \sin \omega t}$$

$$s(t) = \int \sin \omega t \, u^2 \frac{du}{-\omega \sin \omega t}$$

$$= \frac{-1}{\omega} \int u^2 \, du = \frac{-1}{3\omega} u^3 + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{3\omega} \cos^3 \omega t + C$$

لكن $s(0) = 0$ لأن الجسيم انطلق من نقطة الأصل.

$$s(0) = -\frac{1}{3\omega} + C$$

$$0 = -\frac{1}{3\omega} + C \quad \Rightarrow C = \frac{1}{3\omega}$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{1}{3\omega} \cos^3 \omega t + \frac{1}{3\omega}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

37 طـب: يُمثِّل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t دقيقة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3). إذا كان تركيز الدواء لحظة حقنه في جسم المريض $0.5\ \text{mg/cm}^3$، وأخذ يتغيَّر بمُعدَّل: $C'(t) = \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}$، فأجد $C(t)$.

$$C(t) = \int C'(t)dt = \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{(1+e^{-0.01t})^2}dt$$

$$u = 1 + e^{-0.01t} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -0.01e^{-0.01t} \Rightarrow dt = \frac{du}{-0.01e^{-0.01t}}$$

$$C(t) = \int \frac{-0.01e^{-0.01t}}{u^2} \times \frac{du}{-0.01e^{-0.01t}} = \int u^{-2}\ du$$

$$= -u^{-1} + K$$

(استعمل الرمز K لثابت التكامل بدل C المعتاد لتمييز ثابت التكامل عن رمز الاقتران C).

$$C(t) = -(1+e^{-0.01t})^{-1} + K$$

$$C(0) = -(2)^{-1} + K$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + K \Rightarrow K = 1$$

$$\Rightarrow C(t) = -(1+e^{-0.01t})^{-1} + 1$$

$$C(t) = \frac{-1}{1+e^{-0.01t}} + 1$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

38 أجد قيمة: $\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2}\, dx$، ثمَّ أكتب الإجابة بالصيغة الآتية: $\frac{a}{b} + c\ln d$، حيث: a، b، و c، و d ثوابت صحيحة.

$$u = e^x - 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$e^x = u + 2$$

$$x = \ln 3 \Rightarrow u = e^{\ln 3} - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$x = \ln 4 \Rightarrow u = e^{\ln 4} - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^{4x}}{e^x - 2}\, dx = \int_1^2 \frac{e^{4x}}{u} \frac{du}{e^x} = \int_1^2 \frac{e^{3x}}{u}\, du$$

$$= \int_1^2 \frac{(u+2)^3}{u}\, du$$

$$= \int_1^2 \frac{u^3 + 6u^2 + 12u + 8}{u}\, du$$

$$= \int_1^2 \left(u^2 + 6u + 12 + \frac{8}{u}\right) du$$

$$= \left(\frac{1}{3}u^3 + 3u^2 + 12u + 8\ln|u|\right)\Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{1}{3}(2)^3 + 3(2)^2 + 12(2) + 8\ln 2\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 3(1)^2 + 12(1) + 8\ln 1\right)$$

$$= \frac{70}{3} + 8\ln 2$$

مسألة اليوم يُمثِّل الاقتران $G(t)$ الكتلة الحيوية لمجتمع أسماك في بحيرة بعد t سنة من بَدْء دراستها، حيث G مَقيسة بالكيلوغرام. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الكتلة الحيوية للأسماك هو: $G'(t) = \frac{60000e^{-0.6t}}{(1+5e^{-0.6t})^2}$ مَقيسًا بوحدة (kg/year)، وكانت الكتلة الحيوية للأسماك عند بَدْء الدراسة هي 25000 kg، فأجد الكتلة الحيوية المُتوقَّعة للأسماك بعد 20 سنة من بَدْء الدراسة.

$$G(t) = \int \frac{60000e^{-0.6t}}{(1+5e^{-0.6t})^2}\,dt$$

افرض أنّ: $u = 1 + 5e^{-0.6t}$

$$\frac{du}{dt} = -3e^{-0.6t} \Rightarrow dt = \frac{du}{-3e^{-0.6t}}$$

$$G(t) = \int \frac{60000e^{-0.6t}}{u^2} \times \frac{du}{-3e^{-0.6t}}$$

$$= \int -20000u^{-2}\,du$$

$$= 20000u^{-1} + C$$

$$G(t) = \frac{20000}{1+5e^{-0.6t}} + C$$

$$G(0) = \frac{20000}{1+5} + C$$

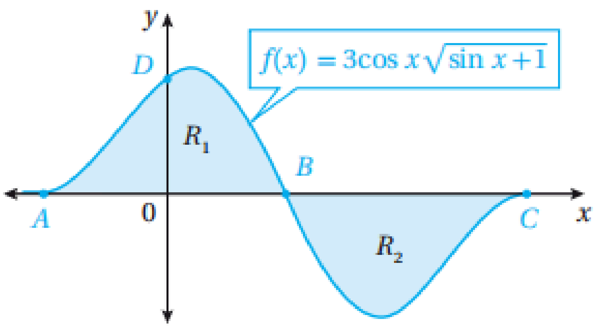
$$25000 = \frac{10000}{3} + C \Rightarrow C = \frac{65000}{3}$$

$$G(t) = \frac{20000}{1+5e^{-0.6t}} + \frac{65000}{3}$$

$$G(20) = \frac{20000}{1+5e^{-12}} + \frac{65000}{3} \approx 41666 \text{ kg}$$

مهارات التفكير العليا

تبرير: إذا كان الشكل المجاور يُمثِّل منحنى الاقتران: $f(x) = 3\cos x\sqrt{\sin x + 1}$، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:



39 أجد إحداثيي كلٍّ من النقاط: A، وB، وC، وD.

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow 3\cos x\sqrt{1+\sin x} = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، ونريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي x للنقطتين C,B)
وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A)

أصغر حلين موجبين هما: $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ بوضع $n = 0$

$$\Rightarrow B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad C\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$$

أكبر حل سالب هو: $x = -\frac{\pi}{2}$، بوضع $n = -1$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $D(0, f(0)) = (0,3)$

40 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

41 أُبيِّن أنَّ للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

40 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

$$A = A_1 + A_2 = A(R_1) + A(R_2)$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,)\,dx + \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,)\,dx\right)$$

$$u = 1 + \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 2$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow u = 0$$

$$A = 3\int_0^2 \cos x\sqrt{u}\,\frac{du}{\cos x} + \left(-3\int_2^0 \cos x\sqrt{u}\,\frac{du}{\cos x}\right)$$

$$= 3\int_0^2 \sqrt{u}\,du + 3\int_0^2 \sqrt{u}\,du$$

$$= 6\int_0^2 \sqrt{u}\,du = 4\,u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = 4(2\sqrt{2} - 0) = 8\sqrt{2}$$

41 أُبيِّن أنَّ للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$A(R_1) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,)\,dx = \int_0^2 3\sqrt{u}\,du = 4\sqrt{2}$$

$$A(R_2) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (3\cos x\sqrt{1+\sin x}\,)dx = -\int_2^0 3\sqrt{u}\,du = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A(R_1) = A(R_2)$$

42 تحدٍّ: أجد قيمة: $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\, dx$. إرشاد: أفترض أنَّ $u = 1 + x^{3/4}$، أو أنَّ $u = x^{1/4}$.

$$u = 1 + x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow dx = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}du, \qquad x^{\frac{3}{4}} = u - 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$x = 16 \Rightarrow u = 9$$

$$\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx = \int_2^9 \frac{x^{\frac{1}{2}}}{u} \times \frac{4}{3}x^{\frac{1}{4}}du$$

$$= \frac{4}{3}\int_2^9 \frac{x^{\frac{3}{4}}}{u}\, du = \frac{4}{3}\int_2^9 \frac{u-1}{u}\, du = \frac{4}{3}\int_2^9 \left(1 - \frac{1}{u}\right) du$$

$$= \frac{4}{3}(u - \ln|u|)\Big|_2^9 = \frac{4}{3}\left(7 - \ln\frac{9}{2}\right)$$

ويمكن حله بطريقة أخرى بتحويل $\sqrt{x}$ إلى $\sqrt[4]{x^2}$ وافتراض أن $\sqrt[4]{x} = u$، ويتحول عندها التكامل المطلوب إلى $\int_1^2 \frac{4u^5}{1+u^3}dx$، وبالقسمة الطويلة يتحول هذا إلى:

$$\int_1^2 \left(4u^2 - \frac{4u^2}{1+u^3}\right) du = \left(\frac{4}{3}u^3 - \frac{4}{3}\ln|1+u^3|\right)\Big|_1^2 = \frac{4}{3}\left(7 - \ln\frac{9}{2}\right)$$

43 تبرير: إذا كان f اقترانًا مُتَّصِلًا، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)\, dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) dx$$

$$u = \frac{\pi}{2} - x \quad \Rightarrow dx = -du$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow u = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -f(\sin u)\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin u)\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\, dx$$

44 تبرير: إذا كان a و b عددين حقيقيين موجبين، فأُثبِت أنَّ: $\int_0^1 x^a (1-x)^b\, dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a\, dx$.

$$u = 1 - x \quad \Rightarrow dx = -du \qquad , x = 1 - u$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow u = 0$$

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b\, dx = \int_1^0 -(1-u)^a u^b\, du$$

$$= \int_0^1 u^b (1-u)^a\, du = \int_0^1 x^b (1-x)^a\, dx$$

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

45 $\int \frac{dx}{x \ln x\, (\ln(\ln x))}$

$$u = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} \Rightarrow dx = x \ln x\, du$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x\, (\ln(\ln x))} = \int \frac{x \ln x\, du}{u x \ln x} = \ln|u| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$$

46 $\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3\; dx$

$$u = 1+\sin x \;\Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \;\Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \quad , \quad \sin x = u - 1$$

$$\int \sin 2x\,(1+\sin x)^3 dx = \int 2\sin x \cos x\, u^3 \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int 2(u-1)u^3 du$$

$$= \int (2u^4 - 2u^3) du$$

$$= \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{2}u^4 + C$$

$$= \frac{2}{5}(1+\sin x)^5 - \frac{1}{2}(1+\sin x)^4 + C$$

47 $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx$

المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين هو 6 ، ولذلك نوحِّد دليلي الجذرين إلى 6

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x^2}}\, dx = \int \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^3 - (\sqrt[6]{x})^2}\, dx$$

$$\sqrt[6]{x} = u \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{1}{6}x^{\frac{-5}{6}} \Rightarrow dx = 6x^{\frac{5}{6}}du = 6(\sqrt[6]{x})^5 du = 6u^5 du$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}\, dx = \int \frac{1}{(\sqrt[6]{x})^3 - (\sqrt[6]{x})^2}\, dx = \int \frac{6u^5}{u^3 - u^2}\, du$$

$$= \int \frac{6u^5}{u^2(u-1)}\, du = \int \frac{6u^3}{u-1}\, du$$

$$= \int \left(6u^2 + 6u + 6 + \frac{6}{u-1}\right) du$$

$$= 2u^3 + 3u^2 + 6u + 6\ln|u-1| + C$$

$$= 2(\sqrt[6]{x})^3 + 3(\sqrt[6]{x})^2 + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C$$

$$= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + C$$

إرشاد للسؤال 47: ما المضاعف المشترك الأصغر لدليلي الجذرين؟

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

أسئلة كتاب التمارين

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

$$u = x^2 + 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

2) $\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}\,dx$

$$u = 1 - \cos\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du$$

$$\int \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^2 \sin\frac{x}{2}dx = \int u^2 \sin\frac{x}{2}\frac{2}{\sin\frac{x}{2}}du = \int 2u^2du = \frac{2}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{2}{3}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)^3 + C$$

3) $\int \csc^5 x \cos^3 x\,dx$

$$\int \csc^5 x\cos^3 x dx = \int \frac{\cos^3}{\sin^5 x}xdx = \int \cot^3 x\csc^2 x dx$$

$$u = \cot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\csc^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$$

$$\int \csc^5 x\cos^3 x dx = \int \cot^3 x\csc^2 x dx$$

$$= \int u^3\csc^2 x\frac{du}{-\csc^2 x} = \int -u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= -\frac{1}{4}\cot^4 x + C$$

4 $\int x \sin x^2 \, dx$

$$u = x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int x \sin x^2 \, dx = \int \frac{1}{2} \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

5 $\int x^3 (x+2)^7 \, dx$

$$u = x + 2 \Rightarrow dx = du \quad , \qquad x = u - 2$$

$$\int x^3 (x+2)^7 dx = \int (u-2)^3 u^7 du = \int (u^{10} - 6u^9 + 12u^8 - 8u^7) du$$

$$= \frac{1}{11} u^{11} - \frac{3}{5} u^{10} + \frac{4}{3} u^9 - u^8 + C$$

$$= \frac{1}{11}(x+2)^{11} - \frac{3}{5}(x+2)^{10} + \frac{4}{3}(x+2)^9 - (x+2)^8 + C$$

6 $\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} \, dx$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x} dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x du$$

$$\int \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx = \int \frac{\frac{1}{2}\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{2} u du = \frac{1}{4} u^2 + C = \frac{1}{4} (\ln x)^2 + C$$

7 $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}du$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^u}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}\, du = 2\int e^u\, du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

8 $\int \frac{\sin\left(\ln 4x^2\right)}{x}\, dx$

$$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx$$

$$u = \ln 4x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{8x}{4x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow dx = \frac{x}{2} du$$

$$\int \frac{\sin(\ln 4x^2)}{x} dx = \int \frac{\sin u}{x} \times \frac{x}{2} du$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin u\, du = -\frac{1}{2}\cos u + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(\ln 4x^2) + C$$

9 $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x)\, dx$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow \sec^2 x dx = du$$

$$\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx = \int \cos^3 u\, du = \int \cos u \cos^2 u\, du$$

$$= \int \cos u\,(1 - \sin^2 u\,)du$$

$$v = \sin u \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \cos u \Rightarrow \cos u\, dx = dv$$

$$\int \cos u\,(1 - \sin^2 u\,)du = \int (1 - v^2)dv = v - \frac{1}{3}v^3 + C$$

$$= \sin u - \frac{1}{3}\sin^3 u + C$$

$$= \sin(\tan x) - \frac{1}{3}\sin^3(\tan x) + C$$

ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة:

$$\int \sec^2 x\, \cos(\tan x)\big(1 - \sin^2(\tan x)\big)dx$$

وبتعويض واحد فقط هو $u = \sin(\tan x)$.

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10 $\int_{6}^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}}\, dx$

$u = 4x + 1 \Longrightarrow 4dx = du \quad , \qquad 4x = u - 1$

$x = 20 \Longrightarrow u = 81$

$x = 6 \Longrightarrow u = 25$

$$\int_{6}^{20} \frac{8x}{\sqrt{4x+1}} dx = \int_{25}^{81} \frac{u-1}{2\sqrt{u}} du = \int_{25}^{81} \left(\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\right) du$$

$$= \left(\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{25}^{81} = (243 - 9) - \left(\frac{125}{3} - 5\right) = \frac{592}{3}$$

ملاحظة: يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها بافتراض أن $u = \sqrt{4x+1}$

11 $\int_{2}^{5} \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\, dx$

$u = \sqrt{x-1} \Longrightarrow u^2 = x - 1 \Longrightarrow 2udu = dx$
$x = 5 \Longrightarrow u = 2$
$x = 2 \Longrightarrow u = 1$

$$\int_{2}^{5} \frac{1}{1+\sqrt{x-1}} dx = \int_{1}^{2} \frac{2u}{1+u} du = \int_{1}^{2} \left(2 - \frac{2}{u+1}\right) du$$

$$= (2u - 2\ln|u+1|)|_1^2 = (4 - 2\ln 3) - (2 - 2\ln 2) = 2 + 2\ln\frac{2}{3}$$

ملاحظة: يمكن التوصل إلى النتيجة نفسها بافتراض أن $u = 1 + \sqrt{x-1}$

12 $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\, dx$

$u = 1 + \cos x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Longrightarrow \ dx = \frac{du}{-\sin x}$

$x = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow u = 1$

$x = 0 \Longrightarrow u = 2$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x} dx = \int_{2}^{1} \frac{2\sin x \cos x}{u} \times \frac{du}{-\sin x} = \int_{2}^{1} -\frac{2(u-1)}{u} du$$

$$= \int_{2}^{1} \frac{2-2u}{u} du = \int_{1}^{2} \frac{2u-2}{u} du = \int_{1}^{2} \left(2 - \frac{2}{u}\right) du$$

$$= (2u - 2\ln|u|)|_1^2 = (4 - 2\ln 2) - (2 - 0) = 2 - 2\ln 2$$

13 $\int_{1}^{4} \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}\, dx$

$$u = 1+\sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}du$$

$$x = 4 \Rightarrow u = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$\int_{1}^{4} \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}} dx = \int_{2}^{3} \frac{u^3}{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x}du = \int_{2}^{3} 2u^3du = \frac{1}{2}u^4\Big|_{2}^{3} = \frac{81}{2} - \frac{16}{2} = \frac{65}{2}$$

14 $\int_{0}^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x} = \cos^2 x\, du$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx = \int_{0}^{1} \frac{e^u}{\cos^2 x} \times \cos^2 x du = \int_{0}^{1} e^u du = e^u|_0^1 = e - 1$$

15 $\int_{0}^{\pi/3} \cos^2 x \sin^3 x\, dx$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

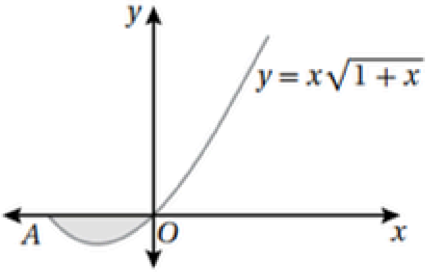
$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin^3 x\, dx = \int_{1}^{\frac{1}{2}} u^2 \sin^3 x \times \frac{du}{-\sin x} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} u^2(1-u^2)\, du$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} (u^2 - u^4)\, du = \left(\frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{160}\right) = \frac{47}{480}$$

16 يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{x+1}$.
أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في هذا الشكل.



$$x\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x = 0 \ , x = -1$$

$$A = -\int_{-1}^{0} f(x)\, dx = \int_{-1}^{0} -x\sqrt{1+x}\, dx$$

$$u = 1 + x \Rightarrow dx = du \quad , \quad x = u - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow u = 0$$

$$A = \int_{-1}^{0} -x\sqrt{1+x}\, dx = \int_{0}^{1} -x\sqrt{u}\, du = \int_{0}^{1} (1-u)\sqrt{u}\, du$$

$$= \int_{0}^{1} \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right) du = \left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

17 $f'(x) = 16 \sin x \cos^3 x ; \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

$$f(x) = \int 16 \sin x \cos^3 x\, dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$f(x) = \int 16 \sin x\ u^3 \times \frac{du}{-\sin x} = \int -16\, u^3\, du = -4u^4 + C$$

$$= -4\cos^4 x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + C$$

$$0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = -4\cos^4 x + 1$$

18 $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$; $(2, 1)$

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx$$

$$u = x^2 + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$f(x) = \int \frac{x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x} = \int \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

$$f(2) = 3 + C$$

$$1 = 3 + C \Rightarrow C = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2+5} - 2$$

19 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو 4 m، فأجد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

$$s(t) = \int \frac{-2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$u = 1 + t^2 \Rightarrow \frac{du}{dt} = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$s(t) = \int \frac{-2t}{u^{\frac{3}{2}}} \times \frac{du}{2t} = \int -u^{-\frac{3}{2}} du = 2u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + C$$

$$s(0) = 2 + C$$

$$4 = 2 + C \Rightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} + 2$$