سلسلة
أجيال العلم
في الرياضيات

أكاديمية و مدارس أجيال العلم
Science Generations Academy
أكاديمية ومدارس أجيال العلم

الوحدة الخامسة

التكامل

رياضيات متقدم

إجابات الدرس الثالث
التكامل بالكسور الجزئية

التكامل بالكسور الجزئية
Integration by Partial Fractions

التكامل بالكسور الجزئية

تعلَّمْتُ سـابقًا أنَّ الاقترانات النسـبية هي اقترانات يُمكِن كتابتها في صورة نسـبة بين كثيري حدود، مثل: $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، حيث: $g(x) \neq 0$، ومن أمثلتها:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \quad , \quad g(x) = \frac{x^5+2x^3-x}{x^2-4x+8} \quad , \quad h(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$$

تعلَّمْتُ أيضًا تجزئة المقادير النسـبية؛ وهي عملية تُفْضي إلى كتابة المقدار النسبي في صورة مجموع مقادير نسـبية أبسـط، كلٌّ منها في صورة: $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، حيـث P وQ كثيرا حدود لا توجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقلُّ من درجة Q، وكلٌّ منهما يُسمّى كسرًا جزئيًّا.

كسر جزئي   كسر جزئي

$$\frac{x+14}{(x-4)(x+2)} = \frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+2}$$

تجزئة المقدار النسبي

يُمكِن اسـتعمال تجزئة المقادير النسـبية لإيجاد تكامل اقترانات نسبية بطريقة تُسمّى **التكامل بالكسور الجزئية** (integration by partial fractions).

أتعلّم

تقـوم طريقـة التكامـل بالكسـور الجزئيـة على تحويل الاقتران النسـبي إلـى مجمـوع اقترانات نسبية أبسط.

وبما أنَّ عملية تجزئة المقادير النسـبية تعتمد على عوامل المقام، فإنَّه توجد حالات للتكامل بالكسـور الجزئية بناءً على نوع عوامل المقام، مثل الحالات الثلاث الآتية التي سأتعلَّمها في هذا الدرس:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطِّية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود خطِّية، أحدها مُكرَّر.
- عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل (مُميِّزه سالب)، وغير مُكرَّر.

التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود خطّية مختلفة

تعلّمْتُ سابقًا أنّه إذا كانت جميع عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ خطّيةً ومختلفة، وكانت درجة البسط أقلّ من درجة المقام، ولا توجد بينهما عوامل مشتركة، فإنَّ كُلًّا منها يُقابِل كسرًا جزئيًّا، بسطه ثابت، ومقامه عامل خطّي؛ أيْ إنَّ:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + \frac{A_3}{a_3x+b_3} + \cdots + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

أُلاحِظ أنَّ تكامل كلٍّ من الكسور الجزئية الناتجة في هذه الحالة هو اقتران لوغاريتمي طبيعي.

أتذكّر

تبدأ عملية كتابة الاقتران النسبي في صورة حاصل جمع كسور جزئية عندما تكون درجة البسط أقلّ من درجة المقام.

مثال 1

أجد: $\int \frac{x-5}{x^2-x-2}\,dx$.

الخطوة 1: أُجزِّئ المقدار النسبي.

بتحليل المقام

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{x-5}{(x+1)(x-2)}$$

بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطّيان

$$\frac{x-5}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

بضرب طرفي المعادلة في (م. م. أ) لمقامي الكسرين الجزئيين

$$x-5 = A(x-2) + B(x+1)$$

بتعويض $x=-1$

$$(-1)-5 = A((-1)-2) + B((-1)+1) \Rightarrow A = 2$$

بتعويض $x=2$

$$(2)-5 = A((2)-2) + B((2)+1) \Rightarrow B = -1$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{x-5}{x^2-x-2}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{x-5}{x^2-x-2} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}$$

أتذكّر

يُمكِن إيجاد قيمة كلٍّ من A وB بتعويض قِيَم مُحدَّدة للمُتغيِّر x، حيث إنَّ اختيار تعويض $x=-1$ يؤدّي إلى حذف المُتغيِّر B، وقَصْر المعادلة على مجهول واحد، هو A؛ واختيار تعويض $x=2$ يؤدّي إلى حذف المُتغيِّر A، وقَصْر المعادلة على مجهول واحد، هو B؛ ما يجعل إيجاد قيمة كلٍّ من A و B أسهل.

الخطوة 2: أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

$$\int \frac{x-5}{x^2-x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-2}\right) dx$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت

$$= 2\ln|x+1| - \ln|x-2| + C$$

بالتبسيط

$$= \ln\left|\frac{(x+1)^2}{x-2}\right| + C$$

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{x-7}{x^2-x-6}\,dx$

$$\frac{x-7}{x^2-x-6} = \frac{x-7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow x-7 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow A = -\frac{4}{5}$$

$$x = -2 \Rightarrow B = \frac{9}{5}$$

$$\int \frac{x-7}{x^2-x-6}dx = \int \left(\frac{-\frac{4}{5}}{x-3} + \frac{\frac{9}{5}}{x+2}\right) dx$$

$$= -\frac{4}{5}\ln|x-3| + \frac{9}{5}\ln|x+2| + C$$

b) $\int \frac{3x-1}{x^2-1}\,dx$

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 3x-1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x = 1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow B = 2$$

$$\int \frac{3x-1}{x^2-1}dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}\right) dx$$

$$= \ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود خطِّية، أحدها مُكرَّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا كان التحليل الكامل لمقام مقدار نسبي يحوي عاملًا خطِّيًّا مُكرَّرًا n من المَرّات، فإنَّ هذا العامل يُقابِل n من الكسور الجزئية التي تكون في صورة:

$$\frac{A_1}{(ax+b)^1}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

أُلاحِظ أنَّ جميع الكسور الناتجة تُفْضي إلى اقتران تكامله اقتران لوغاريتمي طبيعي، أو تكامل: $(ax+b)^{-n}$ المضروب في ثابت.

مثال 2

أجد: $\int \frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}\,dx$.

الخطوة 1: أُجزِّئ المقدار النسبي.

بتحليل المقام
$$\frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}=\frac{3x^2+2}{x(x-1)^2}$$

بكتابة الكسور الجزئية
$$\frac{3x^2+2}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

بضرب طرفي المعادلة في (م. م. أ) لمقامات الكسور الجزئية
$$3x^2+2=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$$

بتعويض $x=0$
$$3(0)^2+2=A(0-1)^2+B(0)(0-1)+C(0)\Rightarrow A=2$$

بتعويض $x=1$
$$3(1)^2+2=A(1-1)^2+B(1)(1-1)+C(1)\Rightarrow C=5$$

بتعويض $x=-1$, $A=2, C=5$
$$3(-1)^2+2=(2)((-1)-1)^2+B(-1)((-1)-1)+(5)((-1))\Rightarrow B=1$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}$$

> **أتذكَّر**
> لإيجاد قيمة B، لا أُعوِّض: $x=0$، أو: $x=1$ في المعادلة؛ لأنَّ ذلك سيحذف قيمة B المطلوب إيجادها، وإنَّما أُعوِّض أيَّ عدد حقيقي آخر، مثل: 2، و3، و -1.

الخطوة 2: أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية
$$\int \frac{3x^2+2}{x^3-2x^2+x}\,dx=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{5}{(x-1)^2}\right)dx$$

تعريف الأُسِّ السالب
$$=\int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+5(x-1)^{-2}\right)dx$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت، وتكامل $(ax+b)^n$
$$=2\ln|x|+\ln|x-1|-5(x-1)^{-1}+C$$

تعريف الأُسِّ السالب
$$=2\ln|x|+\ln|x-1|-\frac{5}{(x-1)}+C$$

أتحقق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}\,dx$

$$\frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow x+4 = A(x-1)^2 + B(2x-1)(x-1) + C(2x-1)$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 18$$

$$x = 1 \Rightarrow C = 5$$

$$x = 0 \Rightarrow 4 = A + B - C \Rightarrow B = -9$$

$$\int \frac{x+4}{(2x-1)(x-1)^2}dx = \int \left(\frac{18}{2x-1} + \frac{-9}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}\right) dx$$

$$= \frac{18}{2}\ln|2x-1| - 9\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$$

$$= 9\ln|2x-1| - 9\ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C$$

$$= 9\ln\left|\frac{2x-1}{x-1}\right| - \frac{5}{x-1} + C$$

b) $\int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

$$\frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x} = \frac{x^2-2x-4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow x^2-2x-4 = Ax(x-2) + Bx + C(x-2)^2$$

$$x = 2 \Rightarrow B = -2$$

$$x = 0 \Rightarrow C = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow -5 = -A + B + C \Rightarrow A = 2$$

$$\int \frac{x^2-2x-4}{x^3-4x^2+4x}dx = \int \left(\frac{2}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{-1}{x}\right) dx$$

$$= 2\ln|x-2| + \frac{2}{x-2} - \ln|x| + C$$

التكامل بالكسور الجزئية: عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير قابل للتحليل، وغير مُكرَّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ تحليل مقام المقدار النسبي قد يحوي عاملًا تربيعيًّا غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله (مُميِّزه سالب). وفي هذه الحالة، ينتج من العامل التربيعي كسر جزئي، بسطه كثير حدود خطِّي في صورة: $Ax + B$، ومقامه العامل التربيعي نفسه.

مثال 3

أجد: $\int \frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)}\, dx$.

الخطوة 1: أُجزِّئ المقدار النسبي.

بكتابة الكسور الجزئية

$$\frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+2}$$

بضرب طرفي المعادلة في (م. م. أ) لمقامات الكسرين الجزئيين

$$5x^2 - 4x + 2 = A(x^2+2) + (Bx + C)(x-1)$$

بتعويض $x = 1$

$$5(1)^2 - 4(1) + 2 = A((1)^2 + 2) + (B(1) + C)(1-1) \Rightarrow A = 1$$

بتعويض $x = 0, A = 1$

$$5(0)^2 - 4(0) + 2 = (1)((0)^2 + 2) + (B(0) + C)(0-1) \Rightarrow C = 0$$

بتعويض $x = 2, A = 1, C = 0$

$$5(2)^2 - 4(2) + 2 = (1)((2)^2 + 2) + (B(2) + 0)(2-1) \Rightarrow B = 4$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{4x}{x^2+2}$$

الخطوة 2: أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 2}{(x-1)(x^2+2)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{4x}{x^2+2}\right) dx$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$، وتكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \ln|x-1| + 2\ln|x^2+2| + C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)}\,dx$

$$\frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow 3x+4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow 4 = 4A - 3C \Rightarrow C = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 7 = 5A - 2B - 2C \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{3x+4}{(x-3)(x^2+4)}dx = \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2+4}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+4}\right) dx$$

$$= \ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$$

b) $\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}\,dx$

$$\frac{7x^2-x+1}{x^3+1} = \frac{7x^2-x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 7x^2-x+1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$$x = -1 \Rightarrow A = 3$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A + C \Rightarrow C = -2$$

$$x = 1 \Rightarrow 7 = A + 2B + 2C \Rightarrow B = 4$$

$$\int \frac{7x^2-x+1}{x^3+1}dx = \int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{4x-2}{x^2-x+1}\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{x+1} + 2 \times \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) dx$$

$$= 3\ln|x+1| + 2\ln|x^2-x+1| + C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

التكامل بالكسـور الجزئية: درجة كثير الحدود في البسـط مُساوية لدرجة كثير الحدود في المقام، أو أكبر منها

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة إيجاد تكاملات لاقترانات نسبية مختلفة في صورة: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$، بحيث لا توجد عوامل مشتركة بين $P(x)$ و $Q(x)$، وتكون درجة $P(x)$ أقلَّ من درجة $Q(x)$.

ولكنْ، إذا كانت درجة $P(x)$ مُسـاوِية لدرجة $Q(x)$، أو أكبر منها، فإنَّه يَلزم تبسـيط الاقتران النسبي بقسمة P على Q، ثمَّ إيجاد التكامل بالكسور الجزئية إذا لزم.

أتذكّر

إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقترانًا نسبيًّا فيه درجة $f(x)$ أكبر من (أو تساوي) درجة $g(x)$، وكان ناتج القسمة $q(x)$، وباقي القسمة $r(x)$، فإنَّ:
$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$

مثال 4

أجد: $\int \frac{3x^4-1}{x^2-1}\,dx$.

الخطوة 1: أقسِم البسط على المقام.

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2+3 \\ \hline x^2-1 & 3x^4 \qquad\quad -1 \\ (-) & 3x^4-3x^2 \\ \hline & \qquad 3x^2 \;\; -1 \\ (-) & \qquad 3x^2 \;\; -3 \\ \hline & \qquad\quad +2 \end{array}$$

إذن:

$$\int \frac{3x^4-1}{x^2-1}\,dx=\int\left(3x^2+3+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$$

الخطوة 2: أُجزِّئ المقدار النسبي.

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$ بكتابة الكسور الجزئية

$$2=A(x+1)+B(x-1)$$ بضرب طرفي المعادلة في (م. م. أ) لمقامات الكسرين الجزئيين

$$2=A(1+1)+B(1-1)\Rightarrow A=1$$ بتعويض $x=1$

$$2=A(-1+1)+B(-1-1)\Rightarrow B=-1$$ بتعويض $x=-1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{2}{x^2-1}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$$

الخطوة 3: أجد التكامل.

$$\int \frac{3x^4-1}{x^2-1}\,dx=\int\left(3x^2+3+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$ التكامل بالكسور الجزئية

$$=x^3+3x+\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$$ تكامل $\frac{1}{ax+b}$، وتكامل اقتران القوَّة

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}\,dx$

$$\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}dx = \int \left(2x+1+\frac{3x-4}{2x^2-x-1}\right)dx$$

$$\frac{3x-4}{2x^2-x-1} = \frac{3x-4}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1}$$

$$\Rightarrow 3x-4 = A(x-1)+B(2x+1)$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{11}{3}$$

$$x = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

$$\int \frac{4x^3-5}{2x^2-x-1}dx = \int \left(2x+1+\frac{\frac{11}{3}}{2x+1}+\frac{-\frac{1}{3}}{x-1}\right)dx$$

$$= x^2 + x + \frac{11}{6}\ln|2x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-1| + C$$

b) $\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}\,dx$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^2-x}dx = \int \left(1+\frac{2x-1}{x^2-x}\right)dx$$

$$= x + \ln|x^2-x| + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

التكامل بالكسور الجزئية لتكاملات محدودة

يُمكِن إيجاد تكاملات محدودة بالكســور الجزئية، وذلك بإجراء التكامل أوّلًا، ثمَّ التعويض في حدود التكامل.

مثال 5

أجد قيمة: $\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4}\,dx$.

الخطوة 1: أُجزِّئ المقدار النسبي.

بتحليل المقام

$$\frac{x-2}{x^2+5x+4} = \frac{x-2}{(x+1)(x+4)}$$

بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطِّيان

$$\frac{x-2}{(x+1)(x+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+4}$$

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين

$$x-2 = A(x+4) + B(x+1)$$

بتعويض $x=-1$

$$(-1)-2 = A((-1)+4)+B((-1)+1) \Rightarrow A=-1$$

بتعويض $x=-4$

$$(-4)-2 = A((-4)+4)+B((-4)+1) \Rightarrow B=2$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{x-2}{x^2+5x+4}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{x-2}{x^2+5x+4} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+4}$$

الخطوة 2: أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

$$\int_0^2 \frac{x-2}{x^2+5x+4}\,dx = \int_0^2 \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+4}\right) dx$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت

$$= \left(-\ln|x+1| + 2\ln|x+4|\right)\Big|_0^2$$

بالتعويض

$$= \left(-\ln|2+1| + 2\ln|2+4|\right) - \left(-\ln|0+1| + 2\ln|0+4|\right)$$

بالتبسيط

$$= \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

أتذكَّر

أستعمل قانوني ضرب اللوغاريتمات وقسمتها لتبسيط الناتج.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

a) $\int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4}\,dx$

$$\int_3^4 \frac{2x^3+x^2-2x-4}{x^2-4}dx = \int_3^4 \left(2x+1+\frac{6x}{x^2-4}\right)dx$$
$$= (x^2+x+3\ln|x^2-4|)|_3^4$$
$$= (20+3\ln 12)-(12+3\ln 5)$$
$$= 8+3\ln\frac{12}{5}$$

b) $\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12}\,dx$

$$\frac{3x-10}{x^2-7x+12} = \frac{3x-10}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}$$
$$\Rightarrow 3x-10 = A(x-4)+B(x-3)$$
$$x=3 \Rightarrow A=1$$
$$x=4 \Rightarrow B=2$$
$$\int_5^6 \frac{3x-10}{x^2-7x+12}dx = \int_5^6 \left(\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-4}\right)dx$$
$$= (\ln|x-3|+2\ln|x-4|)|_5^6$$
$$= \ln 3+2\ln 2-(\ln 2+2\ln 1)$$
$$= \ln 3+\ln 2 = \ln 6$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

التكامل بالكسور الجزئية، والتكامل بالتعويض

تعلَّمْتُ في الدرس السابق أنّه يُمكِن استعمال التعويض لحلِّ تكاملات يصعب حلُّها في صورتها الأصلية. والآن سأتعلَّم كيف أنَّ عملية التعويض في بعض التكاملات قد تُفْضي إلى اقتران نسبي يُمكِن حلُّه باستعمال الكسور الجزئية.

أتعلّم

لا يُمكِن البَدْء بالكسور الجزئية لحلِّ التكامل المجاور؛ لأنَّ الاقتران المُكامَل ليس اقترانًا نسبيًّا.

مثال 6

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

1) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x}\,dx$

الخطوة 1: أُعوِّض.

أفترض أنَّ: $u=e^x$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx}=e^x \Rightarrow dx=\frac{du}{e^x} \Rightarrow dx=\frac{du}{u}$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}-e^x}dx=\int \frac{u}{u^2-u}\times\frac{du}{u}$$ بتعويض $u=e^x,\ dx=\frac{du}{u}$

$$=\int \frac{1}{u^2-u}\,du$$ بالتبسيط

الخطوة 2: أُجزِّئ المقدار النسبي.

$$\frac{1}{u^2-u}=\frac{1}{u(u-1)}$$ بتحليل المقام

$$\frac{1}{u(u-1)}=\frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}$$ بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطِّيان

$$1=A(u-1)+Bu$$ بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين

$$1=A(0-1)+B(0) \Rightarrow A=-1$$ بتعويض $u=0$

$$1=A(1-1)+B(1) \Rightarrow B=1$$ بتعويض $u=1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{1}{u^2-u}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{1}{u^2-u}=\frac{-1}{u}+\frac{1}{u-1}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

الخطوة 3: أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية
$$\int \frac{1}{u^2-u}\,du = \int \left(\frac{-1}{u}+\frac{1}{u-1}\right) du$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$
$$= -\ln|u| + \ln|u-1| + C$$

بتعويض $u=e^x$
$$= -\ln|e^x| + \ln|e^x-1| + C$$

بالتبسيط
$$= -x + \ln|e^x-1| + C$$

أفكّر

هل يُمكِن حلُّ الفرع 1 من المثال 6 بطريقة أخرى؟ أُبرِّر إجابتي.

2) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-16}\,dx$

الخطوة 1: أُعوِّض.

أفترض أنَّ: $u=\sqrt{x}$. ومن ثَمَّ، فإنَّ:

بتربيع طرفي المعادلة
$$u=\sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x$$

$$2u\frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = 2u\,du$$

بتعويض $u=\sqrt{x},\ dx = 2u\,du$
$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-16}\,dx = \int \frac{u}{u^2-16}2u\,du$$

بالتبسيط
$$= 2\int \frac{u^2}{u^2-16}\,du$$

الخطوة 2: أَقسِم البسط على المقام.

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ u^2-16 & u^2 \\ (-) & \underline{u^2-16} \\ & 16 \end{array}$$

إذن:

$$2\int \frac{u^2}{u^2-16}\,du = 2\int \left(1+\frac{16}{u^2-16}\right) du$$

الخطوة 3: أُجزِّئ المقدار النسبي.

بتحليل المقام
$$\frac{16}{u^2-16} = \frac{16}{(u+4)(u-4)}$$

بكتابة كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطّيان
$$\frac{16}{(u+4)(u-4)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-4}$$

أتذكَّر

إذا كانت درجة البسط مُساوِية لدرجة المقام أو أكبر منها، فإنَّه يَلزم تجهيز الاقتران النسبي بقسمة البسط على المقام، ثمَّ إيجاد التكامل بالكسور الجزئية إذا لزم.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين

$$16 = A(u-4) + B(u+4)$$

بتعويض $u=-4$

$$16 = A(-4-4)+B(-4+4) \Rightarrow A=-2$$

بتعويض $u=4$

$$16 = A(4-4)+B(4+4) \Rightarrow B=2$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار: $\frac{16}{u^2-16}$ في الصورة الآتية:

$$\frac{16}{u^2-16} = \frac{-2}{u+4} + \frac{2}{u-4}$$

الخطوة 4: أجد التكامل.

التكامل بالكسور الجزئية

$$2\int \left(1+\frac{16}{u^2-16}\right) du = 2\int \left(1+\frac{-2}{u+4}+\frac{2}{u-4}\right) du$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت

$$= 2u - 4\ln|u+4| + 4\ln|u-4| + C$$

بتعويض $\sqrt{x}=u$

$$= 2\sqrt{x} - 4\ln|\sqrt{x}+4| + 4\ln|\sqrt{x}-4| + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملين الآتيين:

a) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1}\, dx$

$$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow dx = \frac{du}{\sec^2 x}$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1}\, dx = \int \frac{\sec^2 x}{u^2-1}\,\frac{du}{\sec^2 x} = \int \frac{1}{u^2-1}\, du$$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(u+1) + B(u-1)$$

$$u = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$u = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{u^2-1}\, du = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{u+1}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x - 1}\, dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}\right| + C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

b) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\, dx$

$$u = e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\, dx = \int \frac{e^x}{(u-1)(u+4)} \frac{du}{e^x}$$

$$= \int \frac{1}{(u-1)(u+4)}\, du$$

$$\frac{1}{(u-1)(u+4)} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+4}$$

$$\Rightarrow 1 = A(u+4) + B(u-1)$$

$$u = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

$$u = -4 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$$

$$\int \frac{1}{(u-1)(u+4)}\, du = \int \left(\frac{\frac{1}{5}}{u-1} + \frac{-\frac{1}{5}}{u+4} \right) du$$

$$= \frac{1}{5}\ln|u-1| - \frac{1}{5}\ln|u+4| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{u-1}{u+4}\right| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+4)}\, dx = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{e^x-1}{e^x+4}\right| + C$$

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \frac{x-10}{x(x+5)}\,dx$

$$\frac{x-10}{x(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+5}$$
$$\Rightarrow x - 10 = A(x+5) + Bx$$
$$x = 0 \Rightarrow A = -2$$
$$x = -5 \Rightarrow B = 3$$
$$\int \frac{x-10}{x(x+5)}dx = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{x+5}\right) dx$$
$$= -2\ln|x| + 3\ln|x+5| + C$$

2 $\int \frac{2}{1-x^2}\,dx$

$$\frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x}$$
$$\Rightarrow 2 = A(1+x) + B(1-x)$$
$$x = 1 \Rightarrow A = 1$$
$$x = -1 \Rightarrow B = 1$$
$$\int \frac{2}{1-x^2}dx = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$
$$= -\ln|1-x| + \ln|1+x| + C$$
$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

3 $\int \frac{4}{(x-2)(x-4)}\,dx$

$$\frac{4}{(x-2)(x-4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4}$$

$$\Rightarrow 4 = A(x-4) + B(x-2)$$

$$x = 2 \Rightarrow A = -2$$

$$x = 4 \Rightarrow B = 2$$

$$\int \frac{4}{(x-2)(x-4)}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{2}{x-4}\right) dx$$

$$= -2\ln|x-2| + 2\ln|x-4| + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + C$$

4 $\int \frac{3x+4}{x^2+x}\,dx$

$$\frac{3x+4}{x^2+x} = \frac{3x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 3x+4 = A(x+1) + Bx$$

$$x = 0 \Rightarrow A = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{3x+4}{x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{4}{x} + \frac{-1}{x+1}\right) dx$$

$$= 4\ln|x| - \ln|x+1| + C$$

5 $\int \frac{x^2}{x^2-4}\,dx$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4}dx = \int\left(1+\frac{4}{x^2-4}\right)dx$$

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$$\Rightarrow 4 = A(x+2)+B(x-2)$$

$$x=2 \Rightarrow A=1$$

$$x=-2 \Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{x^2}{x^2-4}dx = \int\left(1+\frac{1}{x-2}+\frac{-1}{x+2}\right)dx$$

$$= x+\ln|x-2|-\ln|x+2|+C$$

$$= x+\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$$

6 $\int \frac{3x-6}{x^2+x-2}\,dx$

$$\frac{3x-6}{x^2+x-2} = \frac{3x-6}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

$$\Rightarrow 3x-6 = A(x-1)+B(x+2)$$

$$x=-2 \Rightarrow A=4$$

$$x=1 \Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{3x-6}{x^2+x-2}dx = \int\left(\frac{4}{x+2}+\frac{-1}{x-1}\right)dx$$

$$= 4\ln|x+2|-\ln|x-1|+C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

7 $\int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3}\,dx$

$$\frac{4x+10}{4x^2-4x-3}=\frac{4x+10}{(2x-3)(2x+1)}=\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{2x+1}$$

$$\Rightarrow 4x+10=A(2x+1)+B(2x-3)$$

$$x=\frac{3}{2}\Rightarrow A=4$$

$$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow B=-2$$

$$\int \frac{4x+10}{4x^2-4x-3}dx=\int\left(\frac{4}{2x-3}+\frac{-2}{2x+1}\right)dx$$

$$=2\ln|2x-3|-\ln|2x+1|+C$$

8 $\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}\,dx$

$$\frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}=\frac{2x^2+9x-11}{(x-2)(x+1)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}$$

$$\Rightarrow 2x^2+9x-11=A(x+1)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x-2)(x+1)$$

$$x=2\Rightarrow A=1$$

$$x=-1\Rightarrow B=3$$

$$x=-3\Rightarrow C=-2$$

$$\int \frac{2x^2+9x-11}{x^3+2x^2-5x-6}dx=\int\left(\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}+\frac{-2}{x+3}\right)dx$$

$$=\ln|x-2|+3\ln|x+1|-2\ln|x+3|+C$$

9 $\int \frac{4x}{x^2-2x-3}\,dx$

$$\frac{4x}{x^2-2x-3}=\frac{4x}{(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 4x=A(x+1)+B(x-3)$$

$$x=3\Rightarrow A=3$$

$$x=-1\Rightarrow B=1$$

$$\int \frac{4x}{x^2-2x-3}dx=\int\left(\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=3\ln|x-3|+\ln|x+1|+C$$

10 $\int \frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

$$\frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow 8x^2-19x+1=A(x-2)^2+B(2x+1)(x-2)+C(2x+1)$$

$$x=-\frac{1}{2}\Rightarrow A=2$$

$$x=2\Rightarrow C=-1$$

$$x=0\Rightarrow 1=4A-2B+C\Rightarrow B=3$$

$$\int\frac{8x^2-19x+1}{(2x+1)(x-2)^2}dx=\int\left(\frac{2}{2x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{-1}{(x-2)^2}\right)dx$$

$$=\ln|2x+1|+3\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+C$$

11 $\int \frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}\,dx$

$$\int\frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}dx=\int\left(1+\frac{6-3x}{9x^2-4}\right)dx$$

$$\frac{6-3x}{9x^2-4}=\frac{6-3x}{(3x-2)(3x+2)}=\frac{A}{3x-2}+\frac{B}{3x+2}$$

$$\Rightarrow 6-3x=A(3x+2)+B(3x-2)$$

$$x=\frac{2}{3}\Rightarrow A=1$$

$$x=-\frac{2}{3}\Rightarrow B=-2$$

$$\int\frac{9x^2-3x+2}{9x^2-4}dx=\int\left(1+\frac{1}{3x-2}+\frac{-2}{3x+2}\right)dx$$

$$=x+\frac{1}{3}\ln|3x-2|-\frac{2}{3}\ln|3x+2|+C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

12 $\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}\,dx$

$$\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}dx = \int \left(x+1+\frac{2-x}{x^2+x}\right)dx$$

$$\frac{2-x}{x^2+x} = \frac{2-x}{x(x+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 2-x = A(x+1)+Bx$$

$$x=0 \Rightarrow A=2$$

$$x=-1 \Rightarrow B=-3$$

$$\int \frac{x^3+2x^2+2}{x^2+x}dx = \int \left(x+1+\frac{2}{x}+\frac{-3}{x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2+x+2\ln|x|-3\ln|x+1|+C$$

13 $\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}\,dx$

$$\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}dx = \int \left(-1+\frac{5-x}{-x^2-2x+3}\right)dx$$

$$\frac{5-x}{-x^2-2x+3} = \frac{x-5}{(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}$$

$$\Rightarrow x-5 = A(x-1)+B(x+3)$$

$$x=-3 \Rightarrow A=2$$

$$x=1 \Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{x^2+x+2}{3-2x-x^2}dx = \int \left(-1+\frac{2}{x+3}+\frac{-1}{x-1}\right)dx$$

$$= -x+2\ln|x+3|-\ln|x-1|+C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

14 $\int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}\,dx$

$$\frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow 2x-4 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+2)$$

$$x=-2 \Rightarrow A=-1$$

$$x=0 \Rightarrow -4 = 4A+2C \Rightarrow C=0$$

$$x=1 \Rightarrow -2 = 5A+3B+3C \Rightarrow B=1$$

$$\int \frac{2x-4}{(x^2+4)(x+2)}dx = \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{x}{x^2+4}\right) dx$$

$$= -\ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + C$$

15 $\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}\,dx$

$$\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}dx = \int \left(1 + \frac{-5x^2-2}{x^3+x^2}\right)dx$$

$$\frac{-5x^2-2}{x^3+x^2} = \frac{-5x^2-2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow -5x^2-2 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$x=0 \Rightarrow B=-2$$

$$x=-1 \Rightarrow C=-7$$

$$x=1 \Rightarrow -7 = 2A+2B+C \Rightarrow A=2$$

$$\int \frac{x^3-4x^2-2}{x^3+x^2}dx = \int \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{-7}{x+1}\right) dx$$

$$= x + 2\ln|x| + \frac{2}{x} - 7\ln|x+1| + C$$

16 $\int \frac{3-x}{2-5x-12x^2}\,dx$

$$\frac{3-x}{2-5x-12x^2}=\frac{x-3}{12x^2+5x-2}=\frac{x-3}{(4x-1)(3x+2)}=\frac{A}{4x-1}+\frac{B}{3x+2}$$

$$\Rightarrow x-3=A(3x+2)+B(4x-1)$$

$$x=\frac{1}{4}\Rightarrow A=-1$$

$$x=-\frac{2}{3}\Rightarrow B=1$$

$$\int\frac{3-x}{2-5x-12x^2}dx=\int\left(\frac{-1}{4x-1}+\frac{1}{3x+2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\ln|4x-1|+\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C$$

17 $\int \frac{3x^3+2x^2+12}{x^4+6x^2}\,dx$

$$\frac{3x^3+2x^2+12}{x^4+6x^2}=\frac{3x^3+2x^2+12}{x^2(x^2+6)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+6}$$

$$\Rightarrow 3x^3+2x^2+12=Ax(x^2+6)+B(x^2+6)+(Cx+D)(x^2)$$

$$x=0\Rightarrow 12=6B\Rightarrow B=2$$

$$x=1\Rightarrow 17=7A+7B+C+D\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$x=-1\Rightarrow 11=-7A+7B-C+D\ldots\ldots(2)$$

$$x=2\Rightarrow 44=20A+10B+8C+4D\ldots\ldots(3)$$

بجمع(1) ، و (2) ينتج أنّ: $14B+2D=28$ ، وبتعويض $B=2$، نجد أن $D=0$

وبتعويض قيمتي B, D في المعادلتين 2، و 3 نحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$11=-7A+14-C\Rightarrow 7A+C=3\ldots(4)$$

$$44=20A+20+8C\quad\Rightarrow 5A+2C=6\ldots..(5)$$

وبطرح المعادلة (5) من مثلي المعادلة (4) نجد أنّ :

$$9A=0\Rightarrow A=0$$

وبتعويض قيمة A في المعادلة (4) نجد أنّ: $C=3$

$$\int\frac{3x^3+2x^2+12}{x^4+6x^2}dx=\int\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3x}{x^2+6}\right)dx$$

$$=-\frac{2}{x}+\frac{3}{2}\ln|x^2+6|+C$$

18 $\int \frac{5x-2}{(x-2)^2}\,dx$

$$\frac{5x-2}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow 5x-2 = A(x-2) + B$$

$$x = 2 \Rightarrow B = 8$$

$$x = 0 \Rightarrow -2 = -2A + B \Rightarrow A = 5$$

$$\int \frac{5x-2}{(x-2)^2}dx = \int \left(\frac{5}{x-2} + \frac{8}{(x-2)^2}\right) dx$$

$$= 5\ln|x-2| - \frac{8}{x-2} + C$$

ملاحظة: يمكن حل هذا التكامل بالتعويض $u = x - 2$،

كما يمكن حله بالأجزاء حيث: $u = 5x - 2, dv = (x-2)^{-2}$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

19 $\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}\,dx$

$$\frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2} = \frac{6+3x-x^2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}$$

$$\Rightarrow 6+3x-x^2 = Ax(x+2) + B(x+2) + C(x^2)$$

$$x = 0 \Rightarrow B = 3$$

$$x = -2 \Rightarrow C = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow 8 = 3A + 3B + C \Rightarrow A = 0$$

$$\int_2^4 \frac{6+3x-x^2}{x^3+2x^2}dx = \int_2^4 \left(\frac{3}{x^2} + \frac{-1}{x+2}\right) dx$$

$$= \left(-\frac{3}{x} - \ln|x+2|\right)\Big|_2^4$$

$$= -\frac{3}{4} - \ln 6 + \frac{3}{2} + \ln 4 = \frac{3}{4} + \ln\frac{2}{3}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

20 $\int_{-1/3}^{1/3} \frac{9x^2+4}{9x^2-4}\,dx$

$$\frac{9x^2+4}{9x^2-4} = 1 + \frac{8}{9x^2-4}$$

$$\frac{8}{9x^2-4} = \frac{8}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{3x+2}$$

$$\Rightarrow 8 = A(3x+2) + B(3x-2)$$

$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow A = 2$$

$$x = -\frac{2}{3} \Rightarrow B = -2$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{9x^2+4}{9x^2-4}\,dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{2}{3x-2} + \frac{-2}{3x+2}\right) dx$$

$$= \left(x + \frac{2}{3}\ln|3x-2| - \frac{2}{3}\ln|3x+2|\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(x + \frac{2}{3}\ln\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ln\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\ln 3 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\ln 3$$

21 $\int_{0}^{1} \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx$

$$\frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{2-x} + \frac{C}{(2-x)^2}$$

$$\Rightarrow 17-5x = A(2-x)^2 + B(2-x)(2x+3) + C(2x+3)$$

$$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow A = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow C = 1$$

$$x = 0 \Rightarrow 17 = 4A + 6B + 3C \Rightarrow B = 1$$

$$\int_{0}^{1} \frac{17-5x}{(2x+3)(2-x)^2}\,dx = \int_{0}^{1} \left(\frac{2}{2x+3} + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{(2-x)^2}\right) dx$$

$$= \left(\ln|2x+3| - \ln|2-x| + \frac{1}{2-x}\right)\Big|_{0}^{1}$$

$$= \ln 5 + 1 - \ln 3 + \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln\frac{10}{3}$$

22 $\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3}\,dx$

$$\frac{4}{16x^2+8x-3} = \frac{4}{(4x-1)(4x+3)} = \frac{A}{4x-1} + \frac{B}{4x+3}$$

$$\Rightarrow 4 = A(4x+3) + B(4x-1)$$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow A = 1$$

$$x = -\frac{3}{4} \Rightarrow B = -1$$

$$\int_1^4 \frac{4}{16x^2+8x-3}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{4x-1} + \frac{-1}{4x+3}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln|4x-1| - \frac{1}{4}\ln|4x+3|\right)\Big|_1^4$$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{4x-1}{4x+3}\right|\right)\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\frac{15}{19} - \ln\frac{3}{7}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{35}{19}$$

23 $\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}\,dx$

$$\frac{5x+5}{x^2+x-6} = \frac{5x+5}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\Rightarrow 5x+5 = A(x+3) + B(x-2)$$

$$x = 2 \Rightarrow A = 3$$

$$x = -3 \Rightarrow B = 2$$

$$\int_3^4 \frac{5x+5}{x^2+x-6}\,dx = \int_3^4 \left(\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3}\right) dx$$

$$= (3\ln|x-2| + 2\ln|x+3|)|_3^4$$

$$= 3\ln 2 + 2\ln 7 - 2\ln 6 = \ln\frac{98}{9}$$

24 $\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx$

$$\frac{4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{4}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow 4=A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$$

$$x=0 \Rightarrow A=1$$

$$x=2 \Rightarrow C=2$$

$$x=1 \Rightarrow 4=A-B+C \Rightarrow B=-1$$

$$A=\int_3^4 \frac{4}{x^3-4x^2+4x}\,dx=\int_3^4\left(\frac{1}{x}+\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx$$

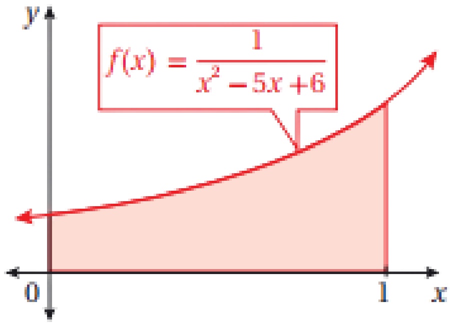
$$=\left(\ln|x|-\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}\right)\Big|_3^4$$

$$=\left(\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{2}{x-2}\right)\Big|_3^4$$

$$=\ln 2-1-\ln 3+2=1+\ln\frac{2}{3}$$

أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

25



$$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx$$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x-2) + B(x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow B = -1$$

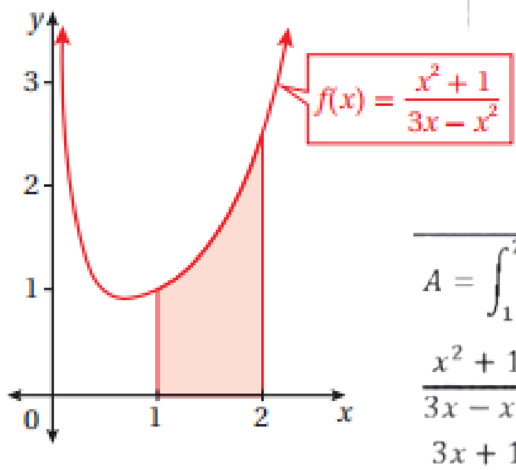
$$A = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{x-3} + \frac{-1}{x-2}\right) dx$$

$$= (\ln|x-3| - \ln|x-2|)\Big|_0^1$$

$$= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\Bigg|_0^1$$

$$= \ln 2 - \ln\frac{3}{2} = \ln\frac{4}{3}$$

26



$$A = \int_1^2 \frac{x^2+1}{3x - x^2}\,dx$$

$$\frac{x^2+1}{3x-x^2} = -1 + \frac{3x+1}{3x-x^2}$$

$$\frac{3x+1}{3x-x^2} = \frac{3x+1}{x(3-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3-x}$$

$$\Rightarrow 3x + 1 = A(3-x) + Bx$$

$$x = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$x = 3 \Rightarrow B = \frac{10}{3}$$

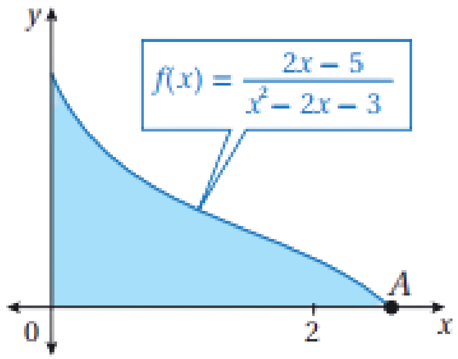
$$A = \int_1^2 \frac{x^2+1}{3x-x^2}\,dx = \int_1^2 \left(-1 + \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{10}{3}}{3-x}\right) dx$$

$$= \left(-x + \frac{1}{3}\ln|x| - \frac{10}{3}\ln|3-x|\right)\Big|_1^2$$

$$= -2 + \frac{1}{3}\ln 2 + 1 + \frac{10}{3}\ln 2$$

$$= -1 + \frac{11}{3}\ln 2$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016



يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-2x-3}$:

27 أجد إحداثيي النقطة A.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow A(2.5,0)$$

28 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة.

$$A = \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{2x-5}{x^2-2x-3}\,dx$$

$$\frac{2x-5}{x^2-2x-3} = \frac{2x-5}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 2x - 5 = A(x+1) + B(x-3)$$

$$x = 3 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

$$x = -1 \Rightarrow -7 = -4B \Rightarrow B = \frac{7}{4}$$

$$A = \int_0^{\frac{5}{2}} \frac{2x-5}{x^2-2x-3}\,dx = \int_0^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{4(x-3)} + \frac{7}{4(x+1)}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-3| + \frac{7}{4}\ln|x+1|\Big|_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{4}(\ln\frac{1}{2} - \ln 3) + \frac{7}{4}(\ln\frac{7}{2} - \ln 1)$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1}{6} + \frac{7}{4}\ln\frac{7}{2} \approx 1.74$$

إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي 1.74 وحدة مربعة تقريبًا.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أجد كلًّا من التكاملات الآتية:

29 $\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx$

$u = \cos x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\sin x \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x}$

$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{u + u^2} \times \frac{du}{-\sin x} = \int \frac{-1}{u + u^2}\, du$

$\frac{-1}{u + u^2} = \frac{-1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u}$

$\Rightarrow -1 = A(1+u) + Bu$

$u = 0 \quad \Rightarrow A = -1$

$u = -1 \quad \Rightarrow B = 1$

$\int \frac{-1}{u + u^2}\, du = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{1+u}\right) du$

$= -\ln|u| + \ln|1+u| + C$

$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\cos x + cos^2 x}\, dx = -\ln|\cos x| + \ln|1 + \cos x| + C$

$= \ln\left|\frac{1 + \cos x}{\cos x}\right| + C = \ln|1 + \sec x| + C$

30 $\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx$

$u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2udu$

$$\int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1}{u^4 + u^3}\, 2udu = \int \frac{2}{u^3 + u^2}\, du$$

$$\frac{2}{u^3 + u^2} = \frac{2}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1}$$

$\Rightarrow 2 = Au(u+1) + B(u+1) + Cu^2$

$u = 0 \quad \Rightarrow B = 2$

$u = -1 \quad \Rightarrow C = 2$

$u = 1 \quad \Rightarrow 2 = 2A + 2B + C \Rightarrow A = -2$

$$\int \frac{2}{u^3 + u^2}\, du = \int \left(\frac{-2}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{2}{u+1}\right) du$$

$$= -2\ln|u| - \frac{2}{u} + 2\ln|u+1| + C$$

$$= 2\ln\left|\frac{u+1}{u}\right| - \frac{2}{u} + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2 + x\sqrt{x}}\, dx = 2\ln\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

31 $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^{x}+2}\,dx$

$$u = e^{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^{x} = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^{x}+2}\,dx = \int \frac{u^2}{u^2+3u+2} \times \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u^2+3u+2}\,du$$

$$\frac{u}{u^2+3u+2} = \frac{u}{(u+1)(u+2)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2}$$

$$\Rightarrow u = A(u+2) + B(u+1)$$

$$u = -1 \Rightarrow A = -1$$

$$u = -2 \Rightarrow B = 2$$

$$\int \frac{u}{u^2+3u+2}\,du = \int \left(\frac{-1}{u+1} + \frac{2}{u+2}\right) du$$

$$= -\ln|u+1| + 2\ln|u+2| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^{x}+2}\,dx = -\ln(e^{x}+1) + 2\ln(e^{x}+2) + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

32 $\int \frac{\cos x}{\sin x(\sin^2 x - 4)}\, dx$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \ \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x\,(\sin^2 x - 4)}\, dx = \int \frac{\cos x}{u(u^2 - 4)} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{1}{u(u^2 - 4)}\, du$$

$$\frac{1}{u(u^2 - 4)} = \frac{1}{u(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-2} + \frac{C}{u+2}$$

$$\Rightarrow 1 = A(u-2)(u+2) + Bu(u+2) + Cu(u-2)$$

$$u = 0 \quad \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$$

$$u = 2 \quad \Rightarrow B = \frac{1}{8}$$

$$u = -2 \quad \Rightarrow C = \frac{1}{8}$$

$$\int \frac{1}{u(u^2 - 4)}\, du = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{u} + \frac{\frac{1}{8}}{u-2} + \frac{\frac{1}{8}}{u+2} \right) du$$

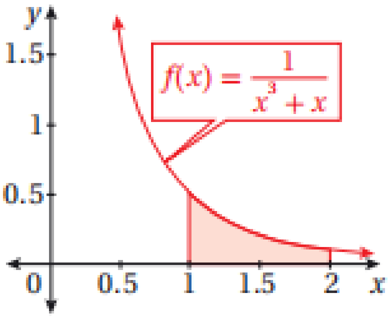
$$= -\frac{1}{4}\ln|u| + \frac{1}{8}\ln|u-2| + \frac{1}{8}\ln|u+2| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sin x\,(\sin^2 x - 4)}\, dx$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|\sin x| + \frac{1}{8}\ln|\sin x - 2| + \frac{1}{8}\ln|\sin x + 2| + C$$

مسألة اليوم يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$.

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة منه.



$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x}\, dx$$

لإيجاد قيمة هذا التكامل نجزئ المقدار $\frac{1}{x^3+x}$ إلى كسور جزئية يمكن إيجاد تكاملاتها بسهولة كما يأتي:

$$\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x)$$

$$x = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 2A + B + C \Rightarrow 1 = 2 + B + C$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = 2A + B - C \Rightarrow 1 = 2 + B - C$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أنّ: $C = 0$ ، و $B = -1$

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x^3 + x}\, dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2 + 1|\Big|_1^2$$

$$= \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 1 + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \frac{3}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 \quad = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

مهارات التفكير العليا

تبرير: أحُلُّ السؤالين الآتيين تباعًا:

33 أجد: $\int \frac{dx}{1+e^x}$ بطريقتين مختلفتين، إحداهما الكسور الجزئية، ثمَّ أبرِّر إجابتي.

الحل الأول بضرب كل من البسط والمقام بـ e^{-x}

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\int \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = -\ln(e^{-x}+1)+C$$

الحل الثاني بالتعويض:

$$u = e^x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$$

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+u} \times \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u(1+u)}\,du$$

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$$

$$\Rightarrow 1 = A(1+u) + Bu$$

$$u = 0 \quad \Rightarrow A = 1$$

$$u = -1 \quad \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{1}{u(1+u)}\,du = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{-1}{u+1}\right)du = \ln|u| - \ln|u+1| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1+e^x}dx = \ln e^x - \ln(e^x+1) + C$$

$$= -(\ln(e^x+1) - \ln e^x) + C$$

$$= -\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right) + C$$

$$= -\ln(1+e^{-x}) + C$$

34 أجد: $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\,dx$.

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}dx = \ln e^x - \ln(e^x+1)\Big|_0^{\ln 2}$$

$$= \ln e^{\ln 2} - \ln\left(e^{\ln 2}+1\right) - (\ln e^0 - \ln(e^0+1))$$

$$= \ln 2 - \ln 3 - 0 + \ln 2 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

35 تبرير: أُثبِتُ أنَّ: $\int_4^9 \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}\,dx = \ln\left(\frac{32}{3}\right) - \frac{5}{24}$.

$$\frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2} = \frac{A}{2x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow 5x^2-8x+1 = A(x-1)^2 + B(2x)(x-1) + C(2x)$$

$$x = 0 \Rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow C = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow 14 = 4A + 4B - 2C \Rightarrow B = 2$$

$$\int_4^9 \frac{5x^2-8x+1}{2x(x-1)^2}\,dx = \int_4^9 \left(\frac{1}{2x} + \frac{2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1}\right)\Big|_4^9$$

$$= \frac{1}{2}\ln 9 + 2\ln 8 + \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\ln 4 - 2\ln 3 - \frac{1}{3}$$

$$= \ln 3 + \ln 64 + \frac{1}{8} - \ln 2 - \ln 9 - \frac{1}{3}$$

$$= \ln\frac{3(64)}{2(9)} - \frac{5}{24} = \ln\frac{32}{3} - \frac{5}{24}$$

36 تبرير: أُثبِتُ أنَّ: $\int_{9}^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\,dx = 4\left(1+\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right)$.

$u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow dx = 2udu$

$x = 9 \Rightarrow u = 3$

$x = 16 \Rightarrow u = 4$

$$\int_{9}^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\,dx = \int_{3}^{4} \frac{2u}{u^2-4}\,2udu = \int_{3}^{4} \frac{4u^2}{u^2-4}\,du$$

$$= \int_{3}^{4} \left(4 + \frac{16}{u^2-4}\right) du$$

$$\frac{16}{u^2-4} = \frac{16}{(u-2)(u+2)} = \frac{A}{u-2} + \frac{B}{u+2}$$

$\Rightarrow 16 = A(u+2) + B(u-2)$

$u = 2 \Rightarrow A = 4$

$u = -2 \Rightarrow B = -4$

$$\int_{3}^{4} \left(4 + \frac{16}{u^2-4}\right) du = \int_{3}^{4} \left(4 + \frac{4}{u-2} + \frac{-4}{u+2}\right) du$$

$$= (4u + 4\ln|u-2| - 4\ln|u+2|)|_3^4$$

$$= 16 + 4\ln 2 - 4\ln 6 - 12 - 4\ln 1 + 4\ln 5$$

$$= 4 + 4\ln\frac{5}{3} = 4(1 + \ln\frac{5}{3})$$

$$\Rightarrow \int_{9}^{16} \frac{2\sqrt{x}}{x-4}\,dx = 4\left(1 + \ln\frac{5}{3}\right)$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

37 تبرير: أُثبِت أنَّ: $\int_0^1 \frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}\,dx = 2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}$.

$$\frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3} = 2+\frac{-x-2}{2x^2+5x+3}$$

$$\frac{-x-2}{2x^2+5x+3} = \frac{-x-2}{(x+1)(2x+3)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+3}$$

$$\Rightarrow -x-2 = A(2x+3)+B(x+1)$$

$$x=-1 \Rightarrow A=-1$$

$$x=-\frac{3}{2} \Rightarrow B=1$$

$$\int_0^1 \frac{4x^2+9x+4}{2x^2+5x+3}\,dx = \int_0^1 \left(2+\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{2x+3}\right)dx$$

$$= \left(2x-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|2x+3|\right)\Big|_0^1$$

$$= 2-\ln 2+\frac{1}{2}\ln 5-0+\ln 1-\frac{1}{2}\ln 3$$

$$= 2-\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln 5-\frac{1}{2}\ln 3$$

$$= 2+\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 4-\ln 3) = 2+\frac{1}{2}\ln\frac{5}{12}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

38 $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$$

$$u=\sqrt{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}},\quad 1+\sqrt{x}=u^2 \Rightarrow \sqrt{x}=u^2-1$$

$$\Rightarrow dx=4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}du=4u(u^2-1)du$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx=\int \frac{u}{(u^2-1)^2}\,4u(u^2-1)du=\int \frac{4u^2}{u^2-1}\,du$$

$$\frac{4u^2}{u^2-1}=4+\frac{4}{u^2-1}$$

$$\frac{4}{u^2-1}=\frac{4}{(u-1)(u+1)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+1}$$

$$\Rightarrow 4=A(u+1)+B(u-1)$$

$$u=1 \Rightarrow A=2$$

$$u=-1 \Rightarrow B=-2$$

$$\int \frac{4u^2}{u^2-1}\,du=\int \left(4+\frac{2}{u-1}+\frac{-2}{u+1}\right)du$$

$$=4u+2\ln|u-1|-2\ln|u+1|+C$$

$$=4u+2\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx=4\sqrt{1+\sqrt{x}}+2\ln\left|\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}+1}\right|+C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

39 $\int \frac{x}{16x^4 - 1}\, dx$

$$\frac{x}{16x^4 - 1} = \frac{x}{(4x^2+1)(2x-1)(2x+1)} = \frac{Ax+B}{4x^2+1} + \frac{C}{2x-1} + \frac{D}{2x+1}$$

$$\Rightarrow x = (Ax+B)(2x-1)(2x+1) + C(4x^2+1)(2x+1)$$
$$+ D(4x^2+1)(2x-1)$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{8}$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow D = \frac{1}{8}$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = -B + C - D \Rightarrow B = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 3A + 3B + 15C + 5D \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x}{16x^4 - 1}\, dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}x}{4x^2+1} + \frac{\frac{1}{8}}{2x-1} + \frac{\frac{1}{8}}{2x+1} \right) dx$$

$$= -\frac{1}{16}\ln(4x^2+1) + \frac{1}{16}\ln|2x-1| + \frac{1}{16}\ln|2x+1| + C$$

$$= \frac{1}{16}\ln\left|\frac{4x^2-1}{4x^2+1}\right| + C$$

0799819016 أ.أحمد محمد البشايرة

40 $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}\,dx$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}\,dx$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{(u+1)(u+2)^2}\,du$$

$$\frac{1}{(u+1)(u+2)^2} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2} + \frac{C}{(u+2)^2}$$

$$A(u+2)^2 + B(u+2)(u+1) + C(u+1) = 1$$

$$u = -2 \Rightarrow -C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = -1$$

$$u = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$u = 0 \Rightarrow 4 + 2B - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$\int \frac{1}{(u+1)(u+2)^2}\,du = \int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2} - \frac{1}{(u+2)^2}\right) du$$

$$= \ln|u+1| - \ln|u+2| + \frac{1}{u+2} + C$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)^2}\,dx = \ln(x^2+1) - \ln(x^2+2) + \frac{1}{x^2+2} + C$$

$$= \ln(\frac{x^2+1}{x^2+2}) + \frac{1}{x^2+2} + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

أسئلة كتاب التمارين

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx$

$$\frac{4}{x^2+4x}=\frac{4}{x(x+4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}$$

$$A(x+4)+B(x)=4$$

$$x=0 \Longrightarrow A=1$$

$$x=-4 \Longrightarrow B=-1$$

$$\int \frac{4}{x^2+4x}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)dx=\ln|x|-\ln|x+4|+C=\ln\left|\frac{x}{x+4}\right|+C$$

2) $\int \frac{6}{x^2-9}\,dx$

$$\frac{6}{x^2-9}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}$$

$$A(x+3)+B(x-3)=6$$

$$x=3 \Longrightarrow A=1$$

$$x=-3 \Longrightarrow B=-1$$

$$\int \frac{6}{x^2-9}\,dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\ln|x-3|-\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

❸ $\int \frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} dx$

$$\frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} = \frac{x^2 - 3x + 8}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2) = x^2 - 3x + 8$$

$$x = 2 \Rightarrow A = \frac{2}{3}$$

$$x = -1 \Rightarrow C = -4$$

$$x = 0 \Rightarrow A - 2B - 2C = 8 \Rightarrow \frac{2}{3} - 2B + 8 = 8 \Rightarrow B = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{x^2 - 3x + 8}{x^3 - 3x - 2} dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \frac{2}{3} \ln|x-2| + \frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{4}{x+1} + C$$

❹ $\int \frac{x - 10}{x^2 - 2x - 8} dx$

$$\frac{x - 10}{x^2 - 2x - 8} = \frac{x - 10}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2) + B(x-4) = x - 10$$

$$x = 4 \Rightarrow A = -1$$

$$x = -2 \Rightarrow B = 2$$

$$\int \frac{x - 10}{x^2 - 2x - 8} dx = \int \left(-\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x+2} \right) dx$$

$$= -\ln|x-4| + 2\ln|x+2| + C$$

5 $\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}dx$

$$\frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1} = 1+\frac{5x-1}{2x^2+x-1} = 1+\frac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}$$

$$= 1+\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}$$

$$A(2x-1)+B(x+1) = 5x-1$$

$$x=-1 \Rightarrow A=2$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow B=1$$

$$\int \frac{2x^2+6x-2}{2x^2+x-1}\,dx = \int \left(1+\frac{2}{x+1}+\frac{1}{2x-1}\right)dx$$

$$= x+2\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$$

6 $\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx$

$$\frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$$

$$A(x^2+2)+(Bx+C)(x+1) = 2x^2-x+6$$

$$x=-1 \Rightarrow A=3$$

$$x=0 \Rightarrow 2A+C=6 \Rightarrow 6+C=6 \Rightarrow C=0$$

$$x=1 \Rightarrow 3A+2B+2C=7 \Rightarrow 9+2B=7 \Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{2x^2-x+6}{(x^2+2)(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{3}{x+1}+\frac{-x}{x^2+2}\right)dx$$

$$= 3\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

7 $\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx$

$$\frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

$$A(x-3)^2 + B(x+1)(x-3) + C(x+1) = 8x+24$$

$$x=-1 \Rightarrow A=1$$

$$x=3 \Rightarrow C=12$$

$$x=0 \Rightarrow 9A-3B+C=24 \Rightarrow 9-3B+12=24 \Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{8x+24}{(x+1)(x-3)^2}\,dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x-3} + \frac{12}{(x-3)^2}\right) dx$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x-3| - \frac{12}{x-3} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right| - \frac{12}{x-3} + C$$

8 $\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,dx$

$$\frac{8x}{x^3+x^2-x-1} = \frac{8x}{x^2(x+1)-(x+1)} = \frac{8x}{(x^2-1)(x+1)} = \frac{8x}{(x-1)(x+1)^2}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$A(x+1)(x-1) + B(x-1) + C(x+1)^2 = 8x$$

$$x=-1 \Rightarrow B=4$$

$$x=1 \Rightarrow C=2$$

$$x=0 \Rightarrow -A-B+C=0 \Rightarrow -A-4+2=0 \Rightarrow A=-2$$

$$\int \frac{8x}{x^3+x^2-x-1}\,dx = \int \left(\frac{-2}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{2}{x-1}\right) dx$$

$$= -2\ln|x+1| - \frac{4}{x+1} + 2\ln|x-1| + C = 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{4}{x+1} + C$$

9 $\int \frac{4}{x^3 - 2x^2}\, dx$

$$\frac{4}{x^3-2x^2} = \frac{4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$$

$$A(x)(x-2) + B(x-2) + C(x^2) = 4$$

$$x = 0 \Rightarrow B = -2$$

$$x = 2 \Rightarrow C = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow -A - B + C = 4 \Rightarrow -A + 2 + 1 = 4 \Rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{4}{x^3-2x^2}\, dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{1}{x-2}\right) dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{2}{x} + \ln|x-2| + C = \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + \frac{2}{x} + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

10 $\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\, dx$

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

$$A(x)(x+1) + B(x+1) + C(x^2) = x - 1$$

$$x = 0 \Rightarrow B = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow C = -2$$

$$x = 1 \Rightarrow 2A + 2B + C = 0 \Rightarrow 2A - 2 - 2 = 0 \Rightarrow A = 2$$

$$\int_1^5 \frac{x-1}{x^2(x+1)}\, dx = \int_1^5 \left(\frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-2}{x+1}\right) dx$$

$$= \left(2\ln|x| + \frac{1}{x} - 2\ln|x-2|\right)\Big|_1^5 = \left(\frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|\right)\Big|_1^5 = 2\ln\frac{5}{3} - \frac{4}{5}$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

11 $\int_{7}^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\, dx$

$$\frac{4-x}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$$

$$A(x-2) + B = 4 - x$$

$$x = 2 \Rightarrow B = 2$$

$$x = 0 \Rightarrow -2A + B = 4 \Rightarrow -2A + 2 = 4 \Rightarrow A = -1$$

$$\int_{7}^{12} \frac{4-x}{(x-2)^2}\, dx = \int_{7}^{12} \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}\right) dx$$

$$= \left(-\ln|x-2| - \frac{2}{x-2}\right)\Big|_{7}^{12} = -\ln 10 - \frac{1}{5} + \ln 5 + \frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \ln\frac{1}{2}$$

12 $\int_{1}^{2} \frac{4}{x^2+8x+15}\, dx$

$$\frac{4}{x^2+8x+15} = \frac{4}{(x+5)(x+3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+3}$$

$$A(x+3) + B(x+5) = 4$$

$$x = -5 \Rightarrow A = -2$$

$$x = -3 \Rightarrow B = 2$$

$$\int_{1}^{2} \frac{4}{x^2+8x+15}\, dx = \int_{1}^{2} \left(\frac{-2}{x+5} + \frac{2}{x+3}\right) dx$$

$$= (-2\ln|x+5| + 2\ln|x+3|)|_1^2 = \left(2\ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right|\right)\Big|_1^2$$

$$= 2\ln\frac{5}{7} - 2\ln\frac{2}{3} = 2\ln\frac{15}{14}$$

13 $\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx$

$$\frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x} = 5 + \frac{-x+10}{2x^2-5x} = 5 + \frac{10-x}{x(2x-5)} = 5 + \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-5}$$

$$A(2x-5) + B(x) = 10 - x$$

$$x = 0 \Rightarrow A = -2$$

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow B = 3$$

$$\int_1^2 \frac{10x^2-26x+10}{2x^2-5x}\,dx = \int_1^2 \left(5 + \frac{-2}{x} + \frac{3}{2x-5}\right) dx$$

$$= \left(5x - 2\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|2x-5|\right)\Big|_1^2 = 10 - 2\ln 2 - 5 - \frac{3}{2}\ln 3 = 5 - \ln 12\sqrt{3}$$

14 $\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx$

$$\frac{25}{(x+1)(2x-3)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-3} + \frac{C}{(2x-3)^2}$$

$$A(2x-3)^2 + B(x+1)(2x-3) + C(x+1) = 25$$

$$x = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow C = 10$$

$$x = 0 \Rightarrow 9A - 3B + C = 25 \Rightarrow 9 - 3B + 10 = 25 \Rightarrow B = -2$$

$$\int_2^5 \frac{25}{(x+1)(2x-3)^2}\,dx = \int_2^5 \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-2}{2x-3} + \frac{10}{(2x-3)^2}\right) dx$$

$$= \left(\ln|x+1| - \ln|2x-3| - \frac{5}{2x-3}\right)\Big|_2^5 = \left(\ln\left|\frac{x+1}{2x-3}\right| - \frac{5}{2x-3}\right)\Big|_2^5$$

$$= \left(\ln\frac{6}{7} - \frac{5}{7}\right) - (\ln 3 - 5) = \frac{30}{7} + \ln\frac{2}{7}$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

15 $\int_0^2 \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}\,dx$

$$\frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6} = 1+\frac{16-2x}{x^2-x-6} = 1+\frac{16-2x}{(x-3)(x+2)} = 1+\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}$$

$$A(x+2)+B(x-3) = 16-2x$$

$$x=3 \Rightarrow A=2$$

$$x=-2 \Rightarrow B=-4$$

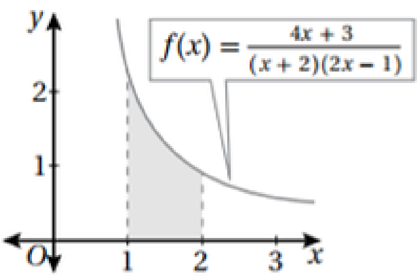
$$\int_0^2 \frac{x^2-3x+10}{x^2-x-6}\,dx = \int_0^2 \left(1+\frac{2}{x-3}+\frac{-4}{x+2}\right)dx$$

$$= (x+2\ln|x-3|-4\ln|x+2|)|_0^2$$

$$= 2-4\ln 4-2\ln 3+4\ln 2 = 2-2\ln 12$$

أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين:

16



$$A = \int_1^2 \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx$$

$$\frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-1}$$

$$A(2x-1)+B(x+2) = 4x+3$$

$$x=-2 \Rightarrow A=1$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow B=2$$

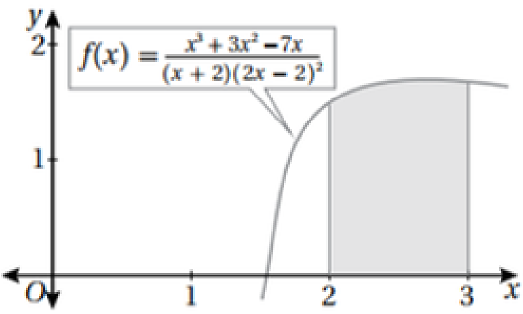
$$A = \int_1^2 \frac{4x+3}{(x+2)(2x-1)}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{2x-1}\right)dx$$

$$= (\ln|x+2|+\ln|2x-1|)|_1^2$$

$$= (\ln 4+\ln 3)-(\ln 3+0) = \ln 4$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

17



$$A = \int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx$$

$$\frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2} = \frac{x^3+3x^2-7x}{4x^3-12x+8} = \frac{1}{4} + \frac{3x^2-4x-2}{4x^3-12x+8}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3x^2-4x-2}{(x+2)(2x-2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-2} + \frac{C}{(2x-2)^2}$$

$$A(2x-2)^2 + B(x+2)(2x-2) + C(x+2) = 3x^2-4x-2$$

$$x = -2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 \Rightarrow C = -1$$

$$x = 0 \Rightarrow 4A - 4B + 2C = -2 \Rightarrow 2 - 4B - 2 = -2 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$A = \int_2^3 \frac{x^3+3x^2-7x}{(x+2)(2x-2)^2}\,dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-2} + \frac{-1}{(2x-2)^2}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|2x-2| + \frac{1}{2(2x-2)}\right)\Bigg|_2^3$$

$$= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{1}{4}\ln 4 + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 4 + \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\ln\frac{25}{8}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

18 $\int \frac{e^{2x}+e^{x}}{(e^{2x}+1)(e^{x}-1)}\,dx$

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$

$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx = \int \frac{e^x(u+1)}{(u^2+1)(u-1)} \times \frac{du}{e^x} = \int \frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)}du$$

$$\frac{u+1}{(u^2+1)(u-1)} = \frac{Au+B}{u^2+1} + \frac{C}{u-1}$$

$$(Au+B)(u-1) + C(u^2+1) = u+1$$

$$u = 1 \Rightarrow C = 1$$

$$u = 0 \Rightarrow -B + C = 1 \Rightarrow -B + 1 = 1 \Rightarrow B = 0$$

$$u = -1 \Rightarrow 2A - 2B + 2C = 0 \Rightarrow 2A + 2 = 0 \Rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{e^{2x}+e^x}{(e^{2x}+1)(e^x-1)}dx = \int \left(\frac{-u}{u^2+1} + \frac{1}{u-1}\right)du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \ln|u-1| + C = -\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + \ln|e^x-1| + C$$

19 $\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}\,dx$

$$u = \sin x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}dx = \int \frac{5\cos x}{u^2+3u-4} \times \frac{du}{\cos x} = \int \frac{5}{u^2+3u-4}du$$

$$\frac{5}{u^2+3u-4} = \frac{5}{(u+4)(u-1)} = \frac{A}{u+4} + \frac{B}{u-1}$$

$$A(u-1) + B(u+4) = 5$$

$$u = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$u = -4 \Rightarrow A = -1$$

$$\int \frac{5}{u^2+3u-4}du = \int \left(\frac{-1}{u+4} + \frac{1}{u-1}\right)du = -\ln|u+4| + \ln|u-1| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{5\cos x}{\sin^2 x + 3\sin x - 4}dx = -\ln(4+\sin x) + \ln|-1+\sin x| + C$$

$$= \ln\left|\frac{-1+\sin x}{4+\sin x}\right| + C$$

20 $\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6}\, dx$

$u = \tan x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2 x \Rightarrow du = \sec^2 x\, dx$

$\int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6} dx = \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du$

$\frac{1}{u^2 + 5u + 6} = \frac{1}{(u+3)(u+2)} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u+2}$

$A(u+2) + B(u+3) = 1$

$u = -3 \Rightarrow A = -1$

$u = -2 \Rightarrow B = 1$

$\Rightarrow \int \frac{1}{u^2 + 5u + 6} du = \int \left(\frac{-1}{u+3} + \frac{1}{u+2}\right) du = \ln|u+2| - \ln|u+3| + C$

$\Rightarrow \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 5\tan x + 6} dx = \ln\left|\frac{2 + \tan x}{3 + \tan x}\right| + C$

21 أثبِت أنَّ: $\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 2x - 3}\, dx = \ln\left(\frac{16}{27}\right)$.

$\frac{4x}{x^2 - 2x - 3} = \frac{4x}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$

$A(x+1) + B(x-3) = 4x$

$x = 3 \Rightarrow A = 3$

$x = -1 \Rightarrow B = 1$

$\int_0^1 \frac{4x}{x^2 - 2x - 3} dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x-3} + \frac{1}{x+1}\right) dx = (3\ln|x-3| + \ln|x+1|)\Big|_0^1$

$= (3\ln 2 + \ln 2) - (3\ln 3) = \ln 8 + \ln 2 - \ln 27 = \ln\frac{16}{27}$

22 أُثبِت أنَّ: $\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}\,dx = \frac{1}{3}\ln\frac{4p-2}{p+1}$، حيث: $p>1$.

$$\frac{1}{2x^2+x-1} = \frac{1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$A(x+1)+B(2x-1)=1$$

$$x=-1 \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

$$x=\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{2}{3}$$

$$\int_1^p \frac{1}{2x^2+x-1}dx = \int_1^p \left(\frac{\frac{2}{3}}{2x-1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{3}\ln|2x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+1|\right)\Big|_1^p = \left(\frac{1}{3}\ln|2p-1| - \frac{1}{3}\ln|p+1|\right) - \left(-\frac{1}{3}\ln 2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{2(2p-1)}{p+1}\right| = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{4p-2}{p+1}\right) \quad , p>1$$