الرياضيات المتقدم

الوحدة الثالثة

التفاضل وتطبيقاته

اجابات الدرس الثالث

قاعدة السلسلة

إعداد المعلم:
أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

الدرس الثالث

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

قاعدة السلسلة

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب اقتراني قوَّة، وذلك بإيجاد مشتقة الاقتران الخارجي وقيمته عند الاقتران الداخلي، ثمَّ ضربه في مشتقة الاقتران الداخلي. تُعَدُّ هذه الطريقة إحدى أهم قواعد الاشتقاق، وتُسمّى **قاعدة السلسلة**

فمثلًا، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $h(x) = (5x^3 - 2x)^4$، الذي فيه $u = 5x^3 - 2x$ اقتران داخلي، و $y = u^4$ اقتران خارجي، على النحو الآتي:

قاعدة السلسلة $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

بتعويض $\frac{du}{dx} = 15x^2 - 2, \frac{dy}{dx} = 4u^3$ $= 4u^3 \times (15x^2 - 2)$

بتعويض $u = 5x^3 - 2x$ $= 4(5x^3 - 2x)^3 (15x^2 - 2)$

أتذكَّر

$h(x) = \underbrace{(\overbrace{5x^3 - 2x}^{\text{الداخلي}})^4}_{\text{الخارجي}}$

بوجه عام، يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران الناتج من تركيب اقترانين كما يأتي:

نظرية قاعدة السلسلة

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران المُركَّب: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة الآتية:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، إذا كان: $y = f(u)$، وكان: $u = g(x)$، فإنَّ:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$، حيث تُحسَب قيمة $\frac{dy}{du}$ عندما $u = g(x)$.

أتذكَّر

يُعبِّر الرمز $\frac{dy}{du}$ عن مُعدَّل تغيُّر y بالنسبة إلى u، ويُعبِّر الرمز $\frac{du}{dx}$ عن مُعدَّل تغيُّر u بالنسبة إلى x.

وبكلمات أُخرى، مشتقة الاقتران المُركَّب $f(g(x))$ هي حاصل ضرب مشتقة الاقتران الخارجي f عند الاقتران الداخلي $g(x)$ في مشتقة الاقتران الداخلي $g(x)$.

يُمكِن التوصُّل إلى النتائج الآتية عند تطبيق قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة اقترانات ناتجة من تركيب اقترانين، أحدهما اقتران مثلثي، أو اقتران أُسِّي طبيعي، أو اقتران لوغاريتمي طبيعي:

قاعدة السلسلة والاقترانات المشهورة

نتائج

إذا كان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\sin g(x)\right) = \cos\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\cos g(x)\right) = -\sin\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\tan g(x)\right) = \sec^2\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(e^{(g(x))}\right) = e^{g(x)} \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\csc g(x)\right) = -\csc\left(g(x)\right)\cot\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\sec g(x)\right) = \sec\left(g(x)\right)\tan\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\cot g(x)\right) = -\csc^2\left(g(x)\right) \times g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

مثال 1

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \cos 2x$

الاقتران المعطى

$$f(x) = \cos 2x$$

مشتقة $\cos g(x)$، حيث: $g(x) = 2x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\cos 2x) = -\sin 2x \times 2$$

بالتبسيط

$$= -2\sin 2x$$

2 $f(x) = e^{(x+x^2)}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = e^{(x+x^2)}$$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x+x^2$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{(x+x^2)}) = e^{(x+x^2)} \times (1+2x)$$

3 $f(x) = \ln(\sin x)$

الاقتران المعطى

$$f(x) = \ln(\sin x)$$

مشتقة $\ln g(x)$، حيث: $g(x) = \sin x$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln(\sin x)\right) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

المتطابقات المثلثية النسبية

$$= \cot x$$

أتذكَّر

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

أتذكَّر

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \tan 3x^2$

الحل:

$$f(x) = \tan 3x^2$$
$$f'(x) = 6x\sec^2(3x^2)$$

b) $f(x) = e^{\ln x}$

الحل:

$$f(x) = e^{\ln x} = x$$
$$f'(x) = 1$$

c) $f(x) = \ln(\cot x)$

الحل:

$$f(x) = \ln\cot x$$
$$f'(x) = \frac{-\csc^2 x}{\cot x}$$

قاعدة سلسلة القوّة

يُعَدُّ الاقتران المُركَّب الذي يكون في صورة $f(x) = (g(x))^n$ أحد أكثر الاقترانات المُركَّبة شيوعًا، وتُمثِّل مشتقته حالة خاصة من قاعدة السلسلة، وتُسمّى

قاعدة سلسلة القوّة

حيث الاقتران الخارجي هو اقتران قوّة.

مفهوم أساسي قاعدة سلسلة القوّة

إذا كان n أيَّ عدد حقيقي، وكان: $u = g(x)$ اقترانًا، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة $(g(x))^n$ على النحو الآتي:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

وبصيغة أُخرى، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \times \frac{du}{dx}$$

مثال 2

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$f(x) = (x^2-1)^{2/3}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسّية

$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times \frac{d}{dx}(x^2-1)$ قاعدة سلسلة القوّة

$= \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times 2x$ باشتقاق $x^2 - 1$

$= \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$ الصورة الجذرية

2 $f(x) = \tan^4 x$

$f(x) = \tan^4 x = (\tan x)^4$ بإعادة كتابة الاقتران المعطى

$f'(x) = 4(\tan x)^3 \times \frac{d}{dx}(\tan x)$ قاعدة سلسلة القوّة

$= 4\tan^3 x \times \sec^2 x$ باشتقاق $\tan x$

3 $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$f(x) = \sqrt{\ln x} = (\ln x)^{1/2}$ بكتابة الاقتران في صورة أُسّية

$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(\ln x)$ قاعدة سلسلة القوّة

$= \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2} \times \frac{1}{x}$ باشتقاق $\ln x$

$= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ الصورة الجذرية

أتعلَّم

إذا كان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$(\sqrt{g(x)})' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.

أُفكِّر

ما وجه الاختلاف بين الاقتران:

$f(x) = \tan^4 x$

والاقتران:

$h(x) = \tan x^4$ ؟

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

الحل:

$$f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2} = (x^2-1)^{\frac{2}{5}}$$
$$f'(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{-\frac{3}{5}}(2x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$$

b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

الحل:

$$f(x) = \sqrt{\cos x}$$
$$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$$

c) $f(x) = (\ln x)^5$

الحل:

$$f(x) = (\ln x)^5$$
$$f'(x) = 5(\ln x)^4\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{5(\ln x)^4}{x}$$

الاستعمال المُتكرّر لقاعدة السلسلة

أحتاج أحيانًا إلى استعمال قاعدة السلسلة أكثر من مَرَّة لإيجاد المشتقة. فمثلًا، إذا كان $y = f(u), u = g(x), x = h(t)$، حيث f و g و h اقترانات، فإنَّه يُمكِن إيجاد مشتقة y بالنسبة إلى t باستعمال قاعدة السلسلة مَرَّتين كالآتي:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dt} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

مثال 3

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = e^{\csc 4x}$

الاقتران المعطى

$$f(x) = e^{\csc 4x}$$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = \csc 4x$

$$f'(x) = e^{\csc 4x} \times \frac{d}{dx}(\csc 4x)$$

مشتقة $\csc g(x)$، حيث: $g(x) = 4x$

$$= e^{\csc 4x} \times -\csc 4x \times \cot 4x \times \frac{d}{dx}(4x)$$

بالتبسيط

$$= -4e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$$

② $f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$ الاقتران المعطى

$f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$

مشتقة $\sin g(x)$، حيث: $g(x) = \tan\sqrt{3x^2+4}$

$f'(x) = \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \frac{d}{dx}\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$

مشتقة $\tan g(x)$، حيث: $g(x) = \sqrt{3x^2+4}$

$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x^2+4}\right)$

بكتابة $\sqrt{3x^2+4}$ في صورة أُسّية

$= \cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}$

قاعدة سلسلة القوّة

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times \frac{d}{dx}(3x^2+4)$

باشتقاق $3x^2+4$

$= \cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{-1/2} \times 6x$

الصورة الجذرية، والتبسيط

$= \frac{3x\cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$

أتحقّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$

الحل:

$f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1) = (\cos(7x^3+6x-1))^2$

$f'(x) = 2(\cos(7x^3+6x-1))^1(-\sin(7x^3+6x-1)(21x^2+6))$

$= -2(21x^2+6)\sin(7x^3+6x-1)\cos(7x^3+6x-1)$

$= -(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$

b) $f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$

الحل:

$f(x) = (2+(x^2+1)^4)^3$

$f'(x) = 3(2+(x^2+1)^4)^2(4(x^2+1)^3(2x))$

$= 24x(x^2+1)^3(2+(x^2+1)^4)^2$

مثال 4

① أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ عندما $x = \frac{\pi}{8}$.

الاقتران المعطى

$f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$

قاعدة مشتقة الضرب

$f'(x) = e^{-0.2x}\frac{d}{dx}(\sin 4x) + \sin 4x\frac{d}{dx}(e^{-0.2x})$

قاعدة السلسلة

$= e^{-0.2x} \times 4\cos 4x + \sin 4x \times -0.2e^{-0.2x}$

بإعادة كتابة الاقتران

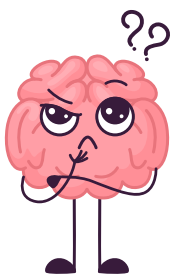
$= 4e^{-0.2x}\cos 4x - 0.2e^{-0.2x}\sin 4x$

بتعويض $x = \frac{\pi}{8}$

$f'(\frac{\pi}{8}) = 4e^{-0.2(\pi/8)}\cos 4(\frac{\pi}{8}) - 0.2e^{-0.2(\pi/8)}\sin 4(\frac{\pi}{8})$

بالتبسيط

$= -0.2e^{-0.025\pi}$



أفكّر

هل يُمكِن إيجاد مشتقة الاقتران: $f(x) = e^{-0.2x}\sin 4x$ بطريقة أُخرى؟

2 أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ عندما $x=0$.

الاقتران المعطى

$$f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$$

قاعدة سلسلة القوّة

$$f'(x)=2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\times\frac{d}{dx}\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)$$

قاعدة مشتقة القسمة

$$=2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\times\left(\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right)$$

بالتبسيط

$$=\frac{2(3x-1)(-3x^2+2x+9)}{(x^2+3)^3}$$

بتعويض $x=0$

$$f'(0)=\frac{2(3(0)-1)(-3(0)^2+2(0)+9)}{((0)^2+3)^3}$$

بالتبسيط

$$=\frac{-18}{27}=\frac{-2}{3}$$

إذن، ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x=0$ هو: $\frac{-2}{3}$.

ومنه، فإنَّ ميل العمودي على المماس عندما $x=0$ هو: $\frac{3}{2}$.

أتحقَّق من فهمي

a) أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x)=(2x+1)^5(x^3-x+1)^4$ عندما $x=1$.

الحل:

$$f(x)=(2x+1)^5(x^3-x+1)^4$$
$$f'(x)=(2x+1)^5(4)(x^3-x+1)^3(3x^2-1)+(x^3-x+1)^4(5)(2x+1)^4(2)$$
$$f'(1)=(3)^5(4)(1)^3(2)+(1)^4(5)(3)^4(2)=2754$$

b) أجد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x)=\frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x=\frac{\pi}{2}$.

الحل:

$$f(x)=\frac{(\cos x)^2}{e^{2x}}$$
$$f'(x)=\frac{e^{2x}\times 2(\cos x)^1(-\sin x)-(\cos x)^2\times 2e^{2x}}{e^{4x}}$$
$$=\frac{-\sin 2x-2(\cos x)^2}{e^{2x}}$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\sin\pi-2\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}{e^{\pi}}=0$$

ميل المماس يساوي صفرًا أي أن المماس أفقي،

ومنه يكون العمودي على المماس رأسيًا وميله غير معرف.

مثال 5 : من الحياة

أعمال: طرحت إحدى الشركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثمَّ رصدت عدد القطع المَبيعة منذ طرحه.

إذا مثَّل الاقتران: $N(t)=\frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}$, $t>0$ عدد القطع المَبيعة منذ طرح هذا المُنتَج، حيث t الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1 أجد مُعدَّل تغيُّر عدد القطع المَبيعة بالنسبة إلى الزمن.

أجد $N'(t)$:

الاقتران المعطى $N(t)=\frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2}$

قاعدة مشتقة القسمة $N'(t)=\frac{(2t+1)^2\frac{d}{dt}(250000\,t^2)-(250000\,t^2)\frac{d}{dt}(2t+1)^2}{((2t+1)^2)^2}$

قاعدتا مشتقة اقتران القوَّة، ومشتقة السلسلة $=\frac{(2t+1)^2(500000\,t)-(250000\,t^2)\,2(2t+1)\times 2}{(2t+1)^4}$

بالتبسيط $=\frac{(2t+1)^2(500000\,t)--(1000000\,t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$

بإخراج العامل المشترك $=\frac{(2t+1)(500000\,t)\,((2t+1)\ -2t)}{(2t+1)^4}$

بقسمة البسط والمقام على $(2t+1)$ $=\frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$

2 أجد $N'(52)$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

أجد $N'(52)$:

مشتقة الاقتران $N(t)$ $N'(t)=\frac{500000\,t}{(2t+1)^3}$

بتعويض $t=52$ $N'(52)=\frac{500000\,(52)}{(2(52)+1)^3}$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 22

إذن، $N'(52)=22$، وهذا يعني أنَّ إجمالي عدد القطع المَبيعة من المُنتَج يزداد بمُعدَّل 22 قطعة لكل أسبوع بعد مرور 52 أسبوعًا على طرح المُنتَج في الأسواق.

أتحقَّق من فهمي

تُحسَب قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات بالدينار باستعمال الاقتران: $U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

الحل:

$$U(x)=80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

$$U'(x)=80\times\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}\Big/\,2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

$$=\frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$$

b) أجد $U'(20)$، ثمَّ أُفسِّر معنى الناتج.

الحل:

$$U'(20)=\frac{200}{(64)^2}\sqrt{\frac{64}{41}}\approx 0.061$$

وهذا يعني أنه عند بيع 20 قطعة فإن قيمة بدل الخدمة تتزايد بمقدار 0.061 دينار/قطعة تقريبًا

مشتقة $a^{(g(x))}$

تعلَّمْتُ سابقًا كيف أجد مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي: $f(x) = e^x$. ولكنْ، كيف يُمكِنني إيجاد مشتقة الاقتران: $f(x) = a^x$، حيث a عدد حقيقي موجب؟

يُمكِن استعمال خصائص اللوغاريتمات لكتابة a^x بدلالة e^x، حيث a عدد حقيقي موجب، و $a \neq 1$، كما يأتي:

الخصائص الأساسية في اللوغاريتمات $a^x = e^{\ln a^x}$

قانون القوّة في اللوغاريتمات $a^x = e^{x \ln a}$

يُمكِن إيجاد مشتقة a^x باستعمال قاعدة السلسلة كما يأتي:

مشتقة a^x $\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x \ln a})$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = x \ln a$ $= e^{x \ln a} \times \ln a$

$e^{x \ln a} = a^x$ $= a^x \times \ln a$

إذن: $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$.

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $a^{g(x)}$، حيث $g(x)$ اقتران، كما يأتي:

نظرية مشتقة $a^{g(x)}$

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$ $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$

أفكِّر

هل ستظلُّ النظرية صحيحة إذا كان $a = 1$؟

مثال 6

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 8^{5x}$

الاقتران المعطى $f(x) = 8^{5x}$

مشتقة $a^{g(x)}$ $f'(x) = (\ln 8)8^{5x}(5) = (5 \ln 8)8^{5x}$

2 $f(x) = 6^{x^2}$

الاقتران المعطى $f(x) = 6^{x^2}$

مشتقة $a^{g(x)}$ $f'(x) = (\ln 6)6^{x^2}(2x) = (2x \ln 6)\, 6^{x^2}$

3 $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

الاقتران المعطى $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

مشتقة $e^{g(x)}$، حيث: $g(x) = 3x$، ومشتقة $a^{g(x)}$، وقاعدة مشتقة المجموع $f'(x) = 3e^{3x} + (3 \ln 2)2^{3x}$

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$

الحل:

$$f(x) = \pi^{\pi x}$$
$$f'(x) = (\pi \ln \pi)\pi^{\pi x} = \pi^{\pi x + 1} \ln \pi$$

b) $f(x) = 6^{1-x^3}$

الحل:

$$f(x) = 6^{1-x^3}$$
$$f'(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$$

c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

الحل:

$$f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$$
$$f'(x) = 4e^{4x} + (2 \ln 4)4^{2x}$$

مشتقة $\log_a g(x)$

لإيجاد مشتقة $\log_a x$، حيث a عدد حقيقي موجب، و $a \neq 1$، أستعمل صيغة تغيير الأساس في اللوغاريتمات لكتابة $\log_a x$ بدلالة اللوغاريتم الطبيعي، ثمَّ أجد المشتقة كما يأتي:

صيغة تغيير الأساس: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

بإيجاد المشتقة: $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)$

بإخراج الثابت $\frac{1}{\ln a}$: $= \dfrac{1}{\ln a} \times \dfrac{d}{dx}(\ln x)$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي: $= \dfrac{1}{\ln a} \times \dfrac{1}{x}$

بالتبسيط: $= \dfrac{1}{x \ln a}$

إذن: $\dfrac{d}{dx}(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

أتذكَّر

$\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln b}$

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة $\log_a g(x)$، حيث $g(x)$ اقتران، كما يأتي:

نظرية — مشتقة $\log_a g(x)$

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \qquad \frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

أتذكَّر

عند التعامل مع الاقتران: $f(x) = \log_a g(x)$، فإنَّ $g(x) > 0$.

مثال 7

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \log \cos x$

الاقتران المعطى: $f(x) = \log \cos x$

مشتقة $\log_a g(x)$: $f'(x) = \dfrac{-\sin x}{(\ln 10)\cos x}$

المتطابقات النسبية: $= -\dfrac{\tan x}{\ln 10}$

2 $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$

قانون القسمة في اللوغاريتمات: $f(x) = \log_2\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) = \log_2 x^2 - \log_2 (x-1)$

مشتقة $\log_a g(x)$، وقاعدة مشتقة الطرح: $f'(x) = \dfrac{2x}{(\ln 2)\,x^2} - \dfrac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$

بالتبسيط: $= \dfrac{2}{(\ln 2)\,x} - \dfrac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$

أتذكَّر

يُكتَب اللوغاريتم الاعتيادي عادةً من دون أساس، حيث إنَّ أساسه 10

أتحقَّق من فهمي

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log \sec x$

الحل:

$$f(x) = \log \sec x$$

$$f'(x) = \frac{\sec x \tan x}{\ln 10 \sec x} = \frac{\tan x}{\ln 10}$$

b) $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$

الحل:

$$f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$$

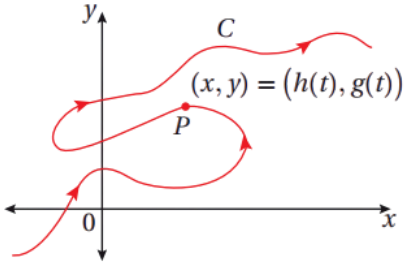
$$f'(x) = \frac{2x + 3}{(x^2 + 3x) \ln 8}$$

مشتقة المعادلات الوسيطية

يُبيِّن الشكل المجاور الجُسَيْم P الذي يتحرَّك على المنحنى C لحظة مروره بالنقطة (x, y).

أُلاحِـظ أنَّ المنحنى C لا يُحقِّق اختبار الخطِّ الرأسي؛ لذا لا يُمكِن إيجاد علاقة واحدة فقط فـي صورة $y = f(x)$ تربط جميع قِيَم x بقِيَم y المُناظِرة لها على المنحنى. ولكنْ، يُمكِن كتابة كلٍّ من الإحداثي x والإحداثي y في صورة اقتران بالنسبة إلى الزمن t كما يأتي:

$$x = h(t), \quad y = g(t)$$



يُشـكِّل هذان الاقترانان معًـا **معادلـة وسـيطية** للمنحنى C، ويُسمّى t **المُتغيِّر الوسيط** لأن كل قيمة له تَحدِّد قيمة للمُتغيِّر x، وقيمة أخرى للمُتغيِّر y. وعند تمثيل الأزواج المُرتَّبة (x, y) في المستوى الإحداثي، يَنتج المنحنى C.

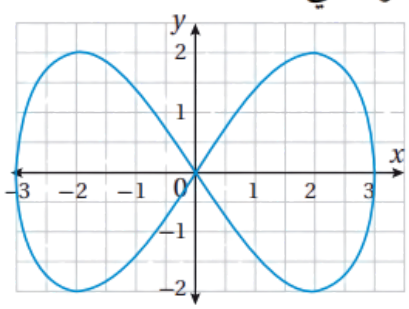
يُمكِن تحديد قِيَم المُتغيِّر t عن طريق فترة تُسـمّى **مجال الوسيط** لأنَّ النقاط على المنحنى قد تتكرَّر بعد هذه الفترة.

$$\underbrace{t_0 \le t \le t_1}_{\text{مجال الوسيط}} \qquad \underbrace{x = h(t) \ , \ y = g(t)}_{\text{معادلة وسيطية}}$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 3\cos t, y = 2\sin 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لهذه المعادلة الوسيطية بإيجاد مشتقة كلٍّ من x و y بالنسبة إلى الوسيط t أوَّلًا، ثمَّ استعمال قاعدة السلسلة على النحو الآتي:



$\frac{dx}{dt} = -3\sin t$ بإيجاد مشتقة x بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$\frac{dy}{dt} = 4\cos 2t$ بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$ باستعمال قاعدة السلسلة

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ بقسمة طرفي المعادلة على $\frac{dx}{dt}$، حيث: $\frac{dx}{dt} \ne 0$

$= \frac{4\cos 2t}{-3\sin t}$ بتعويض $\frac{dy}{dt} = 4\cos 2t, \frac{dx}{dt} = -3\sin t$

بناءً على ما سبق، يُمكِن إيجاد مشتقة أيِّ معادلة وسيطية كما يأتي:

مفهوم أساسي مشتقة المعادلة الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين بالنسبة إلى المُتغيِّر الوسيط t، وكان $x = h(t)$، و $y = g(t)$، فإنَّ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} \ne 0$$

مثال 8

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = 2\sin t, \quad y = 3\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

الخطوة 1: أجد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

$\frac{dx}{dt} = 2\cos t$ بإيجاد مشتقة x بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$\frac{dy}{dt} = -3\sin t$ بإيجاد مشتقة y بالنسبة إلى المُتغيِّر t

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ مشتقة المعادلة الوسيطية

$= \frac{-3\sin t}{2\cos t}$ بتعويض $\frac{dy}{dt} = -3\sin t, \frac{dx}{dt} = 2\cos t$

$= -\frac{3}{2}\tan t$ المتطابقات النسبية

$\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}$ بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$

$= -\frac{3}{2}$ بإيجاد الناتج

أتذكَّر

يُستعمَل الرمز: $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}$ للدلالة على قيمة المشتقة عندما $x = a$.

الخطوة 2: أجد x و y عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

$x = 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$

$y = 3\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ بتعويض $t = \frac{\pi}{4}$

إذن: $x = \frac{2}{\sqrt{2}}, y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

الخطوة 3: أجد معادلة المماس.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ معادلة المستقيم بصيغة الميل ونقطة

$y - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ بتعويض $x_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}, y_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}, m = -\frac{3}{2}$

$2y + 3x = 6\sqrt{2}$ بإعادة كتابة المعادلة

أتحقّق من فهمي

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=\sec t\ ,\quad y=\tan t\ ,\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

الحل:

$$\frac{dy}{dt}=\sec^2 t\ ,\quad \frac{dx}{dt}=\sec t\tan t$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}$$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$$

$$x=\sec\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\ ,\ y=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

معادلة المماس هي:

$$y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2})\ \Rightarrow\ y=\sqrt{2}x-1$$

أتدرّب وأحلّ المسائل

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x)=e^{4x+2}$

الحل:

$$f(x)=e^{4x+2}$$
$$f'(x)=4e^{4x+2}$$

2. $f(x)=50e^{2x-10}$

الحل:

$$f(x)=50e^{2x-10}$$
$$f'(x)=100e^{2x-10}$$

3. $f(x)=\cos(x^2-3x-4)$

الحل:

$$f(x)=\cos(x^2-3x-4)$$
$$f'(x)=-(2x-3)\sin(x^2-3x-4)$$
$$=(3-2x)\sin(x^2-3x-4)$$

4. $f(x)=10x^2e^{-x^2}$

الحل:

$$f(x)=10x^2e^{-x^2}$$
$$f'(x)=(10x^2)(-2xe^{-x^2})+(e^{-x^2})(20x)$$
$$=20xe^{-x^2}(1-x^2)$$

5 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

الحل:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x}}=\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=-\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

6 $f(x)=x^2\tan\frac{1}{x}$

الحل:

$$f(x)=x^2\tan\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=(x^2)\left(-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}\right)+\left(\tan\frac{1}{x}\right)(2x)$$

$$=-\sec^2\frac{1}{x}+2x\tan\frac{1}{x}$$

7 $f(x)=3x-5\cos(\pi x)^2$

الحل:

$$f(x)=3x-5\cos(\pi x)^2$$

$$f'(x)=3+5(2)(\pi x)(\pi)\sin(\pi x)^2$$

$$=3+10\pi^2 x\sin(\pi x)^2$$

8 $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

الحل:

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)=\ln(1+e^x)-\ln(1-e^x)$$

$$f'(x)=\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^x}{1-e^x}=\frac{2e^x}{1-e^{2x}}$$

9 $f(x)=(\ln x)^4$

الحل:

$$f(x)=(\ln x)^4$$

$$f'(x)=\frac{4}{x}(\ln x)^3$$

10 $f(x)=\sin\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\sin x}$

الحل:

$$f(x)=\sin\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{\sin x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x}+\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

11 $f(x)=\sqrt[5]{x^2+8x}$

الحل:

$$f(x)=\sqrt[5]{x^2+8x}=(x^2+8x)^{\frac{1}{5}}$$

$$f'(x)=\frac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$$

12 $f(x)=\dfrac{3^{2x}}{x}$

الحل:

$$f(x)=\frac{3^{2x}}{x}$$
$$f'(x)=\frac{(x)(2\ln 3)3^{2x}-3^{2x}}{x^2}=\frac{(-1+2x\ln 3)3^{2x}}{x^2}$$

13 $f(x)=2^{-x}\cos \pi x$

الحل:

$$f(x)=2^{-x}\cos \pi x$$
$$f'(x)=(2^{-x})(-\pi \sin \pi x)+(\cos \pi x)(-\ln 2)2^{-x}$$
$$=-\pi\, 2^{-x}\sin \pi x-2^{-x}(\cos \pi x)\ln 2$$

14 $f(x)=\dfrac{10\log_4 x}{x}$

الحل:

$$f(x)=\frac{10\log_4 x}{x}$$
$$f'(x)=\frac{\frac{10x}{x\ln 4}-10\log_4 x}{x^2}=\frac{10-10\ln 4\log_4 x}{x^2\ln 4}$$

15 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

الحل:

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$$
$$f'(x)=2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^1\times\frac{(1+\cos x)(\cos x)-(\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$=2\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\times\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$
$$=2\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\times\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}$$
$$=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

16 $f(x)=\log_3(1+x\ln x)$

الحل:

$$f(x)=\log_3(1+x\ln x)$$
$$f'(x)=\frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)}{(\ln 3)(1+x\ln x)}=\frac{1+\ln x}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$$

17 $f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$

الحل:

$$f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$$
$$f'(x)=2e^{\sin 2x}\cos 2x+2e^{2x}\cos(e^{2x})$$

18 $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

الحل:

$$f(x) = \tan^4(\sec(\cos x)) = (\tan(\sec(\cos x)))^4$$
$$f'(x) = 4(\tan(\sec(\cos x)))^3 \sec^2(\sec(\cos x)) \times \sec(\cos x)\tan(\cos x) \times (-\sin x)$$
$$= -4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))\sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

19 $f(x) = 4e^{-0.5x^2}, x = -2$

الحل:

$$f(x) = 4e^{-0.5x^2}$$
$$f(-2) = 4e^{-0.5(-2)^2} = \frac{4}{e^2}$$
$$f'(x) = -4xe^{-0.5x^2}$$

ميل المماس هو: $m = f'(-2) = -4(-2)e^{-0.5(-2)^2} = \frac{8}{e^2}$

معادلة المماس هي: $y - \frac{4}{e^2} = \frac{8}{e^2}(x+2) \Rightarrow y = \frac{8}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$

20 $f(x) = x + \cos 2x, x = 0$

الحل:

$$f(x) = x + \cos 2x$$
$$f(0) = 0 + \cos(0) = 1$$
$$f'(x) = 1 - 2\sin 2x$$

ميل المماس هو: $m = f'(0) = 1 - 2\sin 2(0) = 1$

معادلة المماس هي: $y - 1 = 1(x-0) \Rightarrow y = x + 1$

21 $f(x) = 2^x, x = 0$

الحل:

$$f(x) = 2^x$$
$$f(0) = 2^0 = 1$$
$$f'(x) = (\ln 2)2^x$$

ميل المماس هو: $m = f'(0) = (\ln 2)2^0 = \ln 2$

معادلة المماس هي: $y - 1 = (\ln 2)(x-0) \Rightarrow y = (\ln 2)x + 1$

22 $f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}, x = 3$

الحل:

$$f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}$$
$$f(3) = 2\sin\frac{3\pi}{2} = -2$$
$$f'(x) = (\sqrt{x+1})\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}\right) + \left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)$$

ميل المماس هو: $m = f'(3) = (2)(0) + (-1)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$

معادلة المماس هي: $y + 2 = -\frac{1}{4}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$

23 إذا كان: $A(x) = f(g(x))$، وكان:

$f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3,$

$g(5) = -2, g'(5) = 6$,

فأجد $A'(5)$.

الحل:

$$A(x) = f(g(x))$$
$$A'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$
$$A'(5) = f'(g(5)) \times g'(5)$$
$$= f'(-2) \times g'(5)$$
$$= 4 \times 6 = 24$$

24 إذا كان: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$،

فأُثبِت أنَّ: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

الحل:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1})(1) - (x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$
$$= \frac{\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

بكتيريا: يُمثِّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

25 أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

الحل:

$$A(t) = Ne^{0.1t}$$
$$A'(t) = 0.1Ne^{0.1t}$$
$$A'(3) = 0.1Ne^{0.3}$$

26 إذا كان مُعدَّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل
ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

الحل:

$$A'(k) = 0.1Ne^{0.1k}$$
$$0.2 = 0.1Ne^{0.1k}$$
$$e^{0.1k} = \frac{0.2}{0.1N} = \frac{2}{N}$$
$$0.1k = \ln\frac{2}{N} \quad \Rightarrow \quad k = 10\ln\frac{2}{N}$$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي:

27 $f(x) = \sin \pi x\,, f'''(x)$

الحل:

$$f(x) = \sin \pi x$$
$$f'(x) = \pi \cos \pi x$$
$$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$$
$$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

28 $f(x) = \cos\,(2x + 1), f^{(5)}\,(x)$

الحل:

$$f(x) = \cos(2x + 1)$$
$$f'(x) = -2\sin(2x + 1)$$
$$f''(x) = -4\cos(2x + 1)$$
$$f'''(x) = 8\sin(2x + 1)$$
$$f^{(4)}(x) = 16\cos(2x + 1)$$
$$f^{(5)}(x) = -32\sin(2x + 1)$$

29 $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

الحل:

$$f(x) = \cos x^2$$
$$f'(x) = -2x \sin x^2$$
$$f''(x) = (-2x)(2x\cos x^2) + (\sin x^2)(-2)$$
$$= -4x^2 \cos x^2 - 2\sin x^2$$

30 إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$.

الحل:

$$y = e^{\sin x}$$
$$\frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cos x$$

ميل المماس هو: $m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^{\sin 0}\cos 0 = 1$

31 **مواد مُشِعَّة:** يُمكِن نمذجة الكمية A (بالغرام) المُتبقِّية من من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

الحل:

$$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$
$$A'(t) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$
$$A'(2) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}} \approx -0.098$$

إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل 0.098g كل يوم عندما $t = 2$

زنبرك: تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:

32 أجد سرعة الكرة عندما $t = 1$.

الحل:

$$s(t) = 0.1 \sin 2.4t$$
$$v(t) = 2.4 \times 0.1 \cos 2.4t = 0.24 \cos 2.4t$$
$$v(1) = 0.24 \cos 2.4 \approx -0.177 \text{ cm/s}$$

33 أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفرًا.

الحل:

$$v(t) = 0 \Rightarrow 0.24 \cos 2.4t = 0$$
$$\Rightarrow \cos 2.4t = 0$$

وهذا يعني أن: $|\sin 2.4t| = 1$

أي أن: $\sin 2.4t = 1, \quad \sin 2.4t = -1$

لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو:

$$s = 0.1(1) = 0.1 \quad , \quad s = 0.1(-1) = -0.1$$

إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفرًا يكون موقعها عند 0.1cm أو -0.1 cm

34 أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

الحل:

$$a(t) = -0.24 \times 2.4 \sin 2.4t = -0.576 \sin 2.4t$$
$$a(t) = 0 \Rightarrow \sin 2.4t = 0$$

لكن موقع الكرة هو: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$

إذن، عندما يكون تسارع الكرة صفرًا يكون موقعها عند $s = 0$، أي عند مرورها بموقع الاتزان.

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

35 $x = t + 2, y = t^2 - 1, t = 1$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 2t \ , \quad \frac{dx}{dt} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{1} = 2t$$

ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 2 \times 1 = 2$$

نقطة التماس:

$$x = 1 + 2 = 3 \ , \ y = (1)^2 - 1 = 0$$

معادلة المماس:

$$y - 0 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 6$$

36 $x = \frac{t}{2}, y = t^2 - 4, t = -1$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 2t \ , \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{1}{2}} = 4t$$

ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = 4 \times -1 = -4$$

نقطة التماس:

$$x = -\frac{1}{2} \ , \ y = (-1)^2 - 4 = -3$$

معادلة المماس:

$$y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -4x - 5$$

37 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \frac{\pi}{3}$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = \sin t \ , \quad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

نقطة التماس:

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ y = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

معادلة المماس:

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$$

38 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t, t = -\frac{\pi}{4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t \ , \quad \frac{dx}{dt} = 2 \times \sec t \times \sec t \tan t = 2\sec^2 t \tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t \tan t} = \frac{1}{2}\cot t$$

ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

نقطة التماس:

$$x = \sec^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1 = 1 \ , \ y = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

معادلة المماس:

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

39 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$،

حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس

وميل العمودي على المماس لمنحنى

هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما: $1 + \sqrt{2}$، و$1 - \sqrt{2}$

على الترتيب.

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 2\sin t \ , \quad \frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin t}{2(1 \quad \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

ميل المماس:

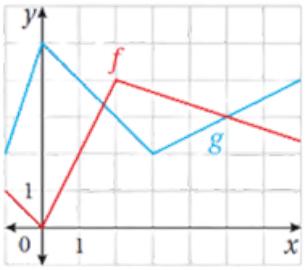
$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1 - \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$

$$= \sqrt{2} + 1$$

ميل العمودي على المماس:

$$m = \frac{-1}{\sqrt{2} + 1} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 1 - \sqrt{2}$$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان:
$h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



40 $h'(1)$

الحل:

$h(x) = f(g(x))$
$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$
$h'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(4) \times g'(1)$

$g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و$(0,5)$ ويساوي -1
$f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(5,3)$ و$(2,4)$ ويساوي $-\frac{1}{3}$

$h'(1) = -\frac{1}{3} \times -1 = \frac{1}{3}$

41 $p'(1)$

الحل:

$p(x) = g(f(x))$
$p'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$
$p'(1) = g'(f(1)) \times f'(1) = g'(2) \times f'(1)$

$g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(3,2)$ و$(0,5)$ ويساوي -1
$f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(0,0)$ و$(2,4)$ ويساوي 2

$p'(1) = -1 \times 2 = -2$

مهارات التفكير العليا

تبريـــر: إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax + b)$، حيث a وb ثابتان موجبان، وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P هو 1، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

42 أُثبِت أنَّ الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

الحل:

$$y = \ln(ax + b)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax + b}$$

ليكن إحداثيا P هما (x_1, y_1)، فيكون ميل المماس عند P هو:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_1} = \frac{a}{ax_1 + b} \Rightarrow \frac{a}{ax_1 + b} = 1$$
$$\Rightarrow a = ax_1 + b$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

المقدار $(1 - \frac{b}{a})$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين.

إذن، الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

43 أجد قيمة كلٍّ من a وb، علمًا بأنَّ P هي النقطة $(0, 2)$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

الحل:

$$y = f(x) = \ln(ax + b)$$
$$y' = f'(x) = \frac{a}{ax + b}$$

ميل المماس عند $P(0,2)$ يساوي 1، أي أنَّ: $f'(0) = 1$

$$f'(0) = \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow a = b$$
$$f(0) = \ln b = 2 \Rightarrow b = e^2$$
$$\Rightarrow a = b = e^2$$

44 أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

الحل:

أفترض أن النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي (x_1, y_1).

بتعويض قيمة كل من a، وb نجد أن:

$$f(x) = \ln(e^2x + e^2) = \ln(e^2(x + 1)) = 2 + \ln(x + 1)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x + 1} \Rightarrow f'(x_1) = \frac{1}{x_1 + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = 1$$
$$y_1 = f(x_1) = f(1) = \ln(e^2 + e^2) = \ln(2e^2) = \ln 2 + \ln e^2 = \ln 2 + 2$$

إذن، النقطة التي ميل المماس عندها يساوي $\frac{1}{2}$ هي $(1, 2 + \ln 2)$.

تبرير: يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = t^2 , y = 2t$:

45 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 2 , \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

46 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(a^2 , 2a)$.

الحل:

ميل المماس عند النقطة $(a^2, 2a)$:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a}$$

ميل العمودي على المماس:

$$m = \frac{-1}{\frac{1}{a}} = -a$$

معادلة العمودي على المماس :

$$y - 2a = -a(x - a^2) \Rightarrow y = -ax + a^3 + 2a$$

47 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|a|(2 + a^2)^2$.

الحل:

لإيجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y = 0$ في معادلته:

$$0 = -ax + a^3 + 2a \Rightarrow x = \frac{a^3 + 2a}{a} = a^2 + 2$$

لإيجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x = 0$:

$$y = -a(0) + a^3 + 2a = a^3 + 2a$$

مساحة المثلث:

$$A = \frac{1}{2}|a^2 + 2||a^3 + 2a|$$
$$= \frac{1}{2}|a^2 + 2||a(a^2 + 2)|$$
$$= \frac{1}{2}|a(a^2 + 2)^2|$$
$$= \frac{1}{2}|a|(a^2 + 2)^2$$

تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

48 $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

الحل:

$$y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$$

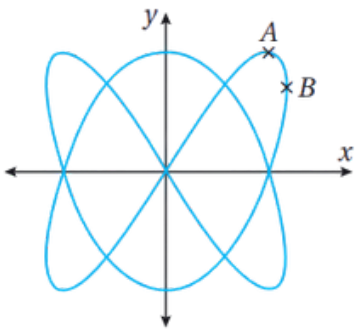
49 $y = e^x \sin^2 x \cos x$

الحل:

$$y = e^x \sin^2 x \cos x = (e^x \sin^2 x)(\cos x)$$
$$\frac{dy}{dx} = (e^x \sin^2 x)(-\sin x) + (\cos x)\left((e^x)(2\sin x \cos x) + (\sin^2 x)(e^x)\right)$$
$$= -e^x \sin^3 x + 2e^x \cos^2 x \sin x + e^x \cos x \sin^2 x$$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = \sin 2t, \quad y = \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



50 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3\cos 3t}{2\cos 2t} = 0$$

$$\Rightarrow \cos 3t = 0 \Rightarrow 3t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$$

$$x_A = \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_A = \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

إذن، إحداثيا A هما $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$.

51 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

الحل:

عند النقطة B يكون المماس موازيًا لمحور y، أي إن ميله غير معرف، ومنه يكون:

$$\cos 2t = 0 \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$x_B = \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$y_B = \sin 3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

إذن، إحداثيا B هما $\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

52 إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

الحل:

عند نقطة الأصل $x = y = 0$

أي أنَّ: $\sin 2t = \sin 3t = 0$

تتحقق هاتان المعادلتان معًا عندما $t = 0$، وعندها يكون ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3\cos 3(0)}{2\cos 2(0)} = \frac{3\cos 0}{2\cos 0} = \frac{3}{2}$$

كما تتحققان أيضًا عندما $t = \pi$، وعندها يكون ميل المماس:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3\cos 3\pi}{2\cos 2\pi} = \frac{3\cos \pi}{2\cos 0} = \frac{-3}{2}$$

تبرير: يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

53 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

الحل:

$$s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9)$$

$$v(t) = \frac{2t - 2}{t^2 - 2t + 1.9}$$

$$a(t) = \frac{(t^2 - 2t + 1.9)(2) - (2t - 2)(2t - 2)}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

$$= \frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$$

54 أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته صفرًا.

الحل:

$$v(t) = 0 \quad \Rightarrow 2t - 2 = 0 \quad \Rightarrow t = 1$$

$$s(1) = \ln(1 - 2 + 1.9) = \ln 0.9 \text{ m}$$

$$a(1) = \frac{-2 + 4 - 0.2}{(1 - 2 + 1.9)^2} = \frac{1.8}{(0.9)^2} \approx 2.2 \text{ m/s}^2$$

55 متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

الحل:

الموقع الابتدائي هو: $s(0) = \ln(1.9)$

$$s(t) = \ln(1.9) \Rightarrow \ln(t^2 - 2t + 1.9) = \ln(1.9)$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t = 0$$

$$\Rightarrow t(t - 2) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0, \quad t = 2$$

يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

أسئلة كتاب التمارين

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = 100e^{-0.1x}$

الحل:

$$f'(x) = -10e^{-0.1x}$$

2. $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

الحل:

$$f'(x) = 2x\cos(x^2 + 1)$$

3. $f(x) = \cos^2 x$

الحل:

$$f'(x) = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$$

4. $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

الحل:

$$f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$$

5. $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

الحل:

$$f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2} = \log_3 x + \frac{1}{2}\log_3(x-1) - \log_3 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln 3} + \frac{1}{2(x-1)\ln 3}$$

6. $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$

الحل:

$$f(x) = 2(\cot(\pi x + 2))^2$$

$$f'(x) = -4\pi\cot(\pi x + 2)\csc^2(\pi x + 2)$$

7. $f(x) = \log 2x$

الحل:

$$f'(x) = \frac{2}{2x\ln 10} = \frac{1}{x\ln 10}$$

8. $f(x) = \ln(x^3 + 2)$

الحل:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 + 2}$$

9. $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3 + 2}\right)^2$

الحل:

$$f'(x) = 2 \times \frac{x^2}{x^3 + 2} \times \frac{2x(x^3 + 2) - 3x^4}{(x^3 + 2)^2}$$

$$= \frac{2x^2}{x^3 + 2} \times \frac{4x - x^4}{(x^3 + 2)^2} = \frac{8x^3 - 2x^6}{(x^3 + 2)^3}$$

10 $f(x) = x^2\sqrt{20-x}$

الحل:

$$f'(x) = x^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x}$$
$$= \frac{-x^2}{2\sqrt{20-x}} + 2x\sqrt{20-x} = \frac{80x - 5x^2}{2\sqrt{20-x}}$$

11 $f(x) = \dfrac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{2e^{x^2}\cos(2x+1) - 2xe^{x^2}\sin(2x+1)}{e^{2x^2}}$$
$$= \frac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$$

12 $f(x) = 3^{\cot x}$

الحل:

$$f'(x) = -(3^{\cot x}\ln 3)\csc^2 x$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13 $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x,\ x = \dfrac{\pi}{2}$

الحل:

$\dfrac{dy}{dx} = 10\cos 5x + 12\sin 3x$

ميل المماس: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = -12$

عندما $x = \frac{\pi}{2}$ ، فإن $y = 2$

معادلة المماس: $y - 2 = -12\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = -12x + 6\pi + 2$

14 $f(x) = (x^2+2)^3,\ x = -1$

الحل:

$f'(x) = 6x(x^2+2)^2$

ميل المماس: $f'(-1) = -54$

$x = -1 \Rightarrow y = f(-1) = 27$

معادلة المماس: $y - 27 = -54(x+1) \Rightarrow y = -54x - 27$

15 $f(x) = \tan 3x,\ x = \dfrac{\pi}{4}$

الحل:

$f'(x) = 3\sec^2 3x$

ميل المماس: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6$

$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$

معادلة المماس: $y + 1 = 6\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

16 أُثبِت أنَّ: $f'(x) = 3\cos^3 x$.

الحل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cos x - 3\sin^2 x \cos x \\ &= 3\cos x\,(1 - \sin^2 x) \\ &= 3\cos x\,(\cos^2 x) \\ &= 3\cos^3 x \end{aligned}$$

17 أجد $f''(x)$.

الحل:

$$f''(x) = -9\cos^2 x \sin x$$

18 يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x = a\cos t,\ y = b\sin t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$.

أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = b\cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cot t$$

ميل المماس: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{b}{a}$

$$t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = a\cos\frac{\pi}{4} = \frac{a}{\sqrt{2}},\quad y = b\sin\frac{\pi}{4} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

معادلة المماس: $y - \frac{b}{\sqrt{2}} = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{a}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x + \sqrt{2}b$

$x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}b$

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و $a > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19 أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون عندها ميل المماس 1

الحل:

$y = e^{ax}$

$$\frac{dy}{dx} = ae^{ax} = 1 \rightarrow e^{ax} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow ax = \ln\frac{1}{a} = -\ln a$$

$$\Rightarrow x = \frac{-\ln a}{a}$$

$$\Rightarrow y = e^{a\left(\frac{-\ln a}{a}\right)} = e^{-\ln a} = (e^{\ln a})^{-1} = \frac{1}{a}$$

إذن، النقطة المطلوبة هي: $P\left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$

20 أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثمَّ أجد قيمة الثابت k.

الحل:

ميل العمودي على المماس عند النقطة P يساوي -1

معادلة العمودي على المماس هي:

$$y - \frac{1}{a} = -1\left(x + \frac{\ln a}{a}\right) \Rightarrow y = -x - \frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow y + x = -\frac{\ln a}{a} + \frac{1}{a} \Rightarrow k = \frac{1 - \ln a}{a}$$

21 إذا كان: $h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$، وكان:
$f(1)=7, f'(1)=4$، فأجد $h'(1)$.

الحل:

$$h(x)=\sqrt{4+3f(x)}=(4+3f(x))^{\frac{1}{2}}$$
$$h'(x)=\frac{1}{2}(3f'(x))(4+3f(x))^{-\frac{1}{2}}=\frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}$$
$$h'(1)=\frac{3f'(1)}{2\sqrt{4+3f(1)}}=\frac{12}{2\sqrt{25}}=\frac{6}{5}$$

22 إذا كان الاقتران: $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}$، فأُثبِت أنَّ:
$f''(x)=4f(x)$.

الحل:

$$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$$
$$f''(x)=4e^{2x}+4e^{-2x}=4(e^{2x}+e^{-2x})=4f(x)$$

23 إذا كان: $f(x)=\sin 4x+\cos 4x$، فأُثبِت أنَّ:
$f''(x)+16f(x)=0$.

الحل:

$$f'(x)=4\cos 4x-4\sin 4x$$
$$f''(x)=-16\sin 4x-16\cos 4x$$
$$=-16(\sin 4x+\cos 4x)=-16f(x)$$
$$f''(x)+16f(x)=0$$

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x=\sin^2\theta, y=2\cos\theta$ حيث: $0\le\theta\le 2\pi$

24 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ.

الحل:

$$\frac{dy}{d\theta}=-2\sin\theta$$
$$\frac{dx}{d\theta}=2\sin\theta\cos\theta$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2\sin\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=-\sec\theta$$

25 أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{2}\ \rightarrow\ -\sec\theta=\sqrt{2}\ \rightarrow\ \sec\theta=-\sqrt{2}\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

عندما $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$، فإن:

$$x=\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$y=2\cos\theta=2\times-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

معادلة المماس:

$$y+\sqrt{2}=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\ \Rightarrow y=\sqrt{2}x-\frac{3}{\sqrt{2}}$$

26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور y.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\sec\theta = -\frac{1}{\cos\theta}$$

يكون المماس موازيًا لمحور y عندما يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معرف، أي عندما $\cos\theta = 0$

وعندها يكون:

$$x = \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - 0 = 1\ ,\ y = 2\cos\theta = 2 \times 0 = 0$$

فالنقطة المطلوبة هي: $(1,0)$

27 سيّارة: يُمثّل الاقتران: $v(t) = 15t\,e^{-0.05t^2}$ سرعة (بالمتر لكل ثانية) سيّارة تتحرّك في مسار مستقيم، حيث: $0 \le t \le 10$. أجد سرعة السيّارة عندما يكون تسارعها صفرًا.

الحل:

$$a(t) = -1.5t^2e^{-0.05t^2} + 15e^{-0.05t^2} = 15e^{-0.05t^2}(1 - 0.1t^2)$$

$$a(t) = 0 \ \Rightarrow 1 - 0.1t^2 = 0 \ \Rightarrow t^2 = 10 \ \Rightarrow t = \sqrt{10}$$

$$v(\sqrt{10}) = 15\sqrt{10}e^{-0.5} = \frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}} \ \text{m/s}$$

أجد $(f\circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

28 $f(u) = u^5 + 1,\ u = g(x) = \sqrt{x}\ ,\ x = 1$

الحل:

$$f(u) = u^5 + 1 \ \Rightarrow f'(u) = 5u^4$$

$$u = g(x) = \sqrt{x} \ \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(fog)'(1) = f'(g(1)) \times g'(1) = f'(1) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

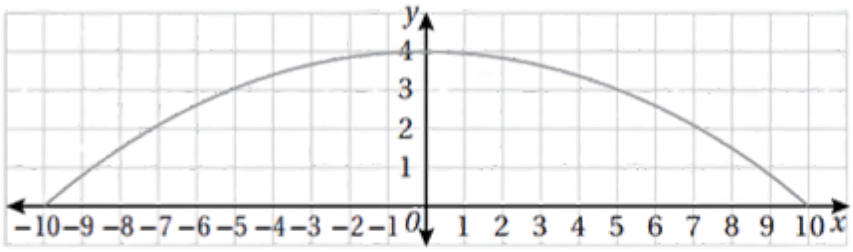
29 $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u},\ u = g(x) = \pi x,\ x = \frac{1}{4}$

الحل:

$$f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u} \ \Rightarrow f'(u) = 1 + \frac{2\cos u \sin u}{\cos^4 u} = 1 + 2\sec^2 u \tan u$$

$$u = g(x) = \pi x \ \Rightarrow g'(x) = \pi$$

$$(fog)'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(g\left(\frac{1}{4}\right)\right) \times g'\left(\frac{1}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \pi = 5\pi$$



مرور: يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبٍّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور x سطح الطريق، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.

إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10\sin t,\ y = 2 + 2\cos 2t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

30 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t.

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = -4\sin 2t\ ,\quad \frac{dx}{dt} = 10\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-4\sin 2t}{10\cos t} = -\frac{4}{5}\sin t \quad ,-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$$

31 قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

الحل:

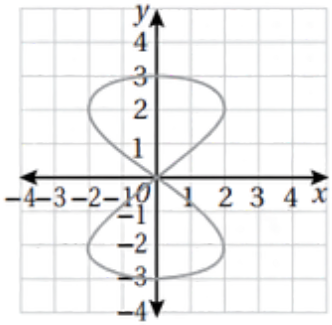
يكون المماس عند أعلى نقطة في المنحنى المعطى أفقيًا، إذن ميله يساوي صفرًا

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \ \Rightarrow t = 0$$

أو أن قيمة x عند أعلى نقطة تساوي صفرًا، إذن: $10\sin t = 0 \Rightarrow t = 0$

أو أن قيمة y عند أعلى نقطة تساوي 4، إذن:

$$2 + 2\cos 2t = 4 \Rightarrow 2\cos 2t = 2 \Rightarrow \cos 2t = 1 \Rightarrow 2t = 0 \Rightarrow t = 0$$



32 **تبرير:** يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2\sin 2t\,,\ y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = -3\sin t \ , \quad \frac{dx}{dt} = 4\cos 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3\sin t}{4\cos 2t} \ , 0 \le t \le 2\pi$$

$$(x,y) = (0,0) \Rightarrow (2\sin 2t\,, 3\cos t) = (0,0) \Rightarrow \sin 2t = 0 \ \text{و} \ \cos t = 0$$

$$\sin 2t = 0 \quad \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$\cos t = 0 \ \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

يتحقق الشرطان معًا عندما $t = \frac{\pi}{2}$ أو $t = \frac{3\pi}{2}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

إذن ميل مماس أحد فرعي المنحنى عند نقطة الأصل هو $\frac{3}{4}$ وميل مماس الفرع الآخر $-\frac{3}{4}$