سلسلة

أجيال العلم

في الرياضيات

أكاديمية ومدارس أجيال العلم

Science Generations Academy

الوحدة الخامسة

التكامل

رياضيات متقدم

إجابات الدرس الأول

تكامل اقترانات خاصة

تكامل اقترانات خاصة
Integration of Special Functions

تكامل الاقترانات الأسّية

تعلّمْتُ سابقًا أنّ التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق، وأنَّ $\int f(x)dx$ يُسمّى التكامل غير المحدود للاقتران $f(x)$، كما في المُخطَّط الآتي الذي يُبيِّن عناصر هذا النوع من التكامل.

متُغيِّر التكامل

ثابت التكامل

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

المُكامَل

اقتران أصلي للاقتران $f(x)$

أمّا $\int_a^b f(x)\,dx$ فيُسمّى التكامل المحدود للاقتران $f(x)$، حيث a الحدُّ السفلي للتكامل، و b الحدُّ العلوي للتكامل.

يُمكِن إيجاد قيمة $\int_a^b f(x)\,dx$ للاقتران المتصل $f(x)$ على النحو الآتي:

حدود التكامل من a إلى b.

أستعمل هذا الرمز بعد الانتهاء من عملية التكامل.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

$$= F(b) - F(a)$$

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدّ العلوي.

قيمة الاقتران الأصلي عند الحدّ السفلي.

بما أنّ التكامل والاشتقاق عمليتان عكسيتان، فإنَّ ذلك يساعد على إيجاد صيغ مباشرة لتكامل اقترانات ناتجة من اشتقاق اقترانات مشهورة بصورة مباشرة، أو باستعمال قاعدة السلسلة، مثل الاقترانات الأُسّية.

أتذكّر

إذا كان $F(x)$ اقترانًا أصليًا للاقتران $f(x)$، فإنَّ: $F'(x) = f(x)$، أيْ إنَّه يُمكِن التحقُّق من صحة الحلِّ بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل. وفي هذه الحالة، يجب أنْ تكون المشتقة مساوية للمُكامَل.

صيغ تكاملات اقترانات أسّية

مفهوم أساسي

إذا كانت k, b, a أعدادًا حقيقيةً، و $a \neq 0$، و $k > 0$، و $k \neq 1$، و e العدد النيبيري، فإنَّ:

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$$

$$\int k^x\,dx = \frac{k^x}{\ln k} + C \qquad \int k^{ax+b}\,dx = \frac{k^{ax+b}}{a\ln k} + C$$

أتذكّر

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$
- $\frac{d}{dx}(k^x) = k^x \times \ln k$
- $\frac{d}{dx}(k^{ax+b}) = k^{ax+b} \times \ln k \times a$

حيث $k > 0$، و $k \neq 1$.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

مثال 1

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int 2e^{4x+3}\,dx$

$\int 2e^{4x+3}\,dx = 2 \times \frac{1}{4} e^{4x+3} + C$ تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي المضروب في ثابت

$= \frac{1}{2} e^{4x+3} + C$ بالتبسيط

2) $\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3)\,dx$

$\int_0^2 (6e^{-3x} + x^3)dx = \left(\frac{6}{-3} e^{-3x} + \frac{1}{4} x^4\right) \Big|_0^2$ تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوّة

$= \left(\frac{6}{-3} e^{-3(2)} + \frac{1}{4}(2)^4\right) - \left(\frac{6}{-3} e^{-3(0)} + \frac{1}{4}(0)^4\right)$ بالتعويض

$= -2e^{-6} + 6$ بالتبسيط

3) $\int \sqrt{e^{x+1}}\,dx$

$\int \sqrt{e^{x+1}}\,dx = \int (e^{x+1})^{1/2}\,dx$ بكتابة المُكامَل في صورة أُسّية

$= \int e^{(x+1)/2}\,dx$ باستعمال قوانين الأسس

$= 2e^{(x+1)/2} + C$ تكامل الاقتران الأُسّي الطبيعي

4) $\int (5^x + 7)\,dx$

$\int (5^x + 7)\,dx = \frac{5^x}{\ln 5} + 7x + C$ تكامل الاقتران الأُسّي، وتكامل الثابت

أتحقّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int (5x^2 - 3e^{7x})\,dx$

$\int (5x^2 - 3e^{7x})\,dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{7}e^{7x} + C$

أتذكّر

- $\int kf(x)dx = k \int f(x)\,dx$ حيث k ثابت.
- $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

أتذكّر

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a, b]$، فإنَّ:

$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

تنطبق هذه القاعدة أيضًا على التكاملات غير المحدودة.

أتذكّر

يحتوي ناتج التكامل غير المحدود على الثابت C؛ لأنَّ مشتقة الثابت صفر. أمّا التكامل المحدود فلا يحتوي على الثابت C؛ لأنّه يُحذَف عند تعويض الحدِّ العلوي والحدِّ السفلي.

b) $\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}\, dx$

$$\int_0^{\ln 3} 8e^{4x}\, dx = \frac{8}{4}e^{4x}\Big|_0^{\ln 3} = 2(e^{4\ln 3} - e^0) = 2(e^{\ln 3^4} - e^0)$$
$$= 2(81 - 1) = 160$$

c) $\int \sqrt{e^{1-x}}\, dx$

$$\int \sqrt{e^{1-x}}\, dx = \int (e^{1-x})^{1/2}\, dx = \int e^{(1-x)/2}\, dx = -2e^{(1-x)/2} + C$$

d) $\int (3^x + 2\sqrt{x})\, dx$

$$\int (3^x + 2\sqrt{x})\, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + 2(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) + C = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

تكامل الاقترانات المثلثية

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية الست، وهذا يعني أنَّه يُمكِن إيجاد تكاملات الاقترانات المثلثية الناتجة من مشتقات تلك الاقترانات الست بصورة مباشرة.

أتعلَّم

إذا كان: $f(x) = \cos x$،
فإنَّ: $f'(x) = -\sin x$،
وهذا يعني أنَّ:
$\int (-\sin x)\, dx = \cos x + C$
ومن ثَمَّ، فإنَّ:
$\int (\sin x)\, dx = -\cos x + C$
علمًا بأنَّه يُمكِن إيجاد بقية صيغ تكاملات الاقترانات المثلثية بالطريقة نفسها.

مفهوم أساسي

صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (1)

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

أمّا الاقترانات المثلثية التي تكون زواياها في صورة: $ax + b$، حيث: $a \neq 0$، فيُمكِن إيجاد تكاملاتها على النحو الآتي:

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

مفهوم أساسي

صيغ تكاملات اقترانات مثلثية (2)

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، فإنَّ:

$$\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$$

$$\int \csc^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$$

$$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b) + C$$

$$\int \csc(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\csc(ax+b) + C$$

أتذكَّر

جميع الاقترانات المُكامَلة في الصندوق المجاور تنجت من اشتقاق الاقترانات الأصلية، باستعمال قواعد اشتقاق الاقترانات المثلثية، وقاعدة السلسلة.

مثال 2

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int 2\sin(4x+3)\,dx$

$$\int 2\sin(4x+3)\,dx = -2\times\frac{1}{4}\cos(4x+3) + C$$ تكامل $\sin(ax+b)$ المضروب في ثابت

$$= -\frac{1}{2}\cos(4x+3) + C$$ بالتبسيط

2 $\int (3\cos x + \sqrt[3]{x})\,dx$

$$\int (3\cos x + \sqrt[3]{x})\,dx = \int (3\cos x + x^{1/3})\,dx$$ بكتابة $\sqrt[3]{x}$ في صورة أُسِّية

$$= 3\sin x + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$$ تكامل $\cos x$ المضروب في ثابت، وتكامل اقتران القوَّة

$$= 3\sin x + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$$ بتحويل القوَّة النسبية إلى جذر

3 $\int_0^{\pi/12} \sec^2 3x\,dx$

$$\int_0^{\pi/12} \sec^2 3x\,dx = \left(\frac{1}{3}\tan 3x\right)\Big|_0^{\pi/12}$$ تكامل $\sec^2(ax+b)$

$$= \left(\frac{1}{3}\tan 3\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) - \left(\frac{1}{3}\tan 3(0)\right)$$ بالتعويض

$$= \frac{1}{3}$$ بالتبسيط

أتعلَّم

يُمكِن التحقُّق من صحة الحلِّ بإيجاد مشتقة نتيجة التكامل، ومقارنتها بالاقتران المُكامَل.

أتذكَّر

لا يَلزم إضافة ثابت التكامل عند إيجاد ناتج التكامل المحدود.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أتحقق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos(3x - \pi)\,dx$

$$\int \cos(3x - \pi)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x - \pi) + C$$

b) $\int (\csc^2(5x) + e^{2x})\,dx$

$$\int (\csc^2(5x) + e^{2x})\,dx = -\frac{1}{5}\cot 5x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

c) $\int_0^{\pi/3} (\sin 2x - \cos 4x)\,dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \cos 4x)\,dx = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{4}\sin\frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{4}\sin 0\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right) - \left(-\frac{1}{2} - 0\right)$$

$$= \frac{6 + \sqrt{3}}{8}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

المتطابقات المثلثية والتكامل

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إعادة كتابة المقادير المثلثية بصورة مكافئة باستعمال المتطابقات المثلثية، وهذا يساعد على إيجاد تكاملات بعض الاقترانات المثلثية التي لا يُمكِن إيجادها مباشرة، مثل: اقترانات الجيب، وجيب التمام، والظلّ، وظلّ التمام المرفوعة إلى أُسٍّ، أو الاقترانات المثلثية التي تكون في صورة حاصل ضرب اقتراني جيب، أو اقتراني جيب تمام، أو اقتران جيب مضروب في اقتران جيب تمام، وغير ذلك من الاقترانات المثلثية.

أتعلَّم

لا يُمكِنني إيجاد تكامل اقتران مثلثي مرفوع إلى أُسٍّ فردي باستعمال المتطابقات فقط، وإنَّما أحتاج إلى طرائق أُخرى سأتعلَّمها في الدرس التالي.

مثال 3

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \tan^2 2x\, dx$

$\int \tan^2 2x\, dx = \int (\sec^2 2x - 1)\, dx$ متطابقات فيثاغورس

$= \frac{1}{2}\tan 2x - x + C$ تكامل $\sec^2 (ax+b)$، وتكامل الثابت

2 $\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$

$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx$ متطابقات تقليص القوَّة

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}$ تكامل $\cos (ax+b)$، وتكامل الثابت

$= \left(\frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}\sin 2(\pi)\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 2(0)\right)\right)$ بالتعويض

$= \frac{1}{2}\pi$ بالتبسيط

أتذكَّر

بما أنَّه لا توجد قاعدة لإيجاد تكامل الضرب، فإنَّه يتعيَّن تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة باستعمال المتطابقات.

3 $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$

$\int \sin 4x \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{2}\big(\sin(4x-5x) + \sin(4x+5x)\big)dx$ متطابقات تحويل الضرب إلى جمع

$= \int \frac{1}{2}\big(-\sin (x) + \sin (9x)\big)\, dx$ بالتبسيط

$= \frac{1}{2}\left(\cos (x) - \frac{1}{9}\cos (9x)\right) + C$ تكامل $\sin (ax+b)$ المضروب في ثابت

أتذكَّر

متطابقات الزاوية السالبة:

- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

4 $\int \frac{dx}{1-\cos x}$

$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \left(\frac{1}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} \right) dx$ — بضرب البسط والمقام في مُرافِق $1-\cos x$، وهو $1+\cos x$

$= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\, dx$ — بالتبسيط

$= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}\, dx$ — متطابقات فيثاغورس

$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx$ — بتوزيع المقام على البسط

$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx$ — بتوزيع المقام على البسط

$= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x)\, dx$ — متطابقة المقلوب، والمتطابقات النسبية

$= -\cot x - \csc x + C$ — تكامل $\csc^2 x$، وتكامل $\csc x \cot x$

أتذكَّر

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه يُمكِن إعادة كتابة المقادير المثلثية بصورة لا تحوي كسرًا إذا كان مقامها في صورة: $1 \pm u$، وذلك باستعمال الضرب في المُرافِق. وتُعزى أهمية هذا الإجراء في التكامل إلى عدم وجود قاعدة لإيجاد تكامل القسمة مباشرة.

أتحقَّق من فهمي

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \cos^4 x\, dx$

$$\int \cos^4 x\, dx$$

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

b) $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \sin x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}(\cos(3x-x) - \cos(3x+x)) \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x - \cos 4x) \, dx$$
$$= (\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$= (\frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{6} - \frac{1}{8}\sin\frac{4\pi}{6}) - (0-0) = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

c) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int (\frac{1}{1+\cos x} \times \frac{1-\cos x}{1-\cos x}) dx$$
$$= \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \, dx$$
$$= \int (\csc^2 x - \cot x \csc x) \, dx$$
$$= -\cot x + \csc x + C$$

تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ: $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$، وهذا يعني أنَّ: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

وبما أنَّ $\ln x$ مُعرَّف فقط عندما يكون $x > 0$، فإنَّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \quad , \quad x > 0 \quad ......(1)$$

ولكنَّ $\ln(-x)$ مُعرَّف عندما يكون $x < 0$.

وباستعمال قاعدة السلسلة، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\ln(-x)) = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$$

وهذا يعني أنَّ:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C \quad , \quad x < 0 \quad ......(2)$$

وبدمج النتيجتين (1) و (2)، فإنَّه يُمكِن التوصُّل إلى القاعدة الآتية:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad , \quad x \neq 0$$

معلومة

ابتكر إسحق نيوتن (1642 - 1726م) وجوتفريد لايبنتس (1646 - 1716م) التفاضل والتكامل، كلٌّ على حِدَة، لكنَّ الأوَّل برهن نتائجه هندسيًّا، في حين استعمل الثاني طرائق جبرية ورمزية لبرهنة نتائجه.

يُمكِن استعمال هذه القاعدة لإيجاد تكاملات مجموعة أوسع من الاقترانات، مثل الاقترانات التــي تُكتَب في صورة: $\frac{1}{ax+b}$، أو صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$؛ أي الاقترانــات التي يُمكِن كتابتها في صورة يكون فيها البسط أحد مضاعفات مشتقة المقام، وذلك بملاحظة أنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\ln|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مفهوم أساسي تكاملات ينتج منها اقتران لوغاريتمي طبيعي

إذا كان a, b عددين حقيقيين، و $a \neq 0$، وكان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad , x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \quad , x \neq -\frac{b}{a}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C, f(x) \neq 0$$

مثال 4

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1 $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

$$\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx = 2e^x + 3\ln|x| + C$$

تكامل e^x المضروب في ثابت، وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

2 $\int \frac{1}{4x-1}\,dx$

$$\int \frac{1}{4x-1}\,dx = \frac{1}{4}\ln|4x-1| + C$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$

3 $\int \frac{2x^5-4}{x}\,dx$

$$\int \frac{2x^5-4}{x}\,dx = \int \left(\frac{2x^5}{x} - \frac{4}{x}\right) dx$$

بقسمة كل حدٍّ في البسط على المقام

$$= \int \left(2x^4 - \frac{4}{x}\right) dx$$

بالتبسيط

$$= \frac{2}{5}x^5 - 4\ln|x| + C$$

تكامل اقتران القوَّة المضروب في ثابت، وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

أتذكَّر

بما أنَّه لا توجد قاعدة لتكامل القسمة، فإنَّه يتعيَّن تبسيط المُكامَل إلى حدود جبرية منفصلة.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

4 $\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx$

$\int \frac{2x}{x^2-1}\,dx = \ln|x^2-1| + C$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

5 $\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx$

$\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx = 3\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx$ بإعادة كتابة الاقتران في صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$

$= 3\ln|x^2+9| + C$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$= 3\ln(x^2+9) + C$ $|x^2+9| = x^2+9$

6 $\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx$

$\int \frac{\cos x}{3+2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\times\cos x}{3+2\sin x}\,dx$ بالضرب في 2، والقسمة على 2

$= \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{3+2\sin x}\,dx$ بالتبسيط

$= \frac{1}{2}\ln|3+2\sin x| + C$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$= \frac{1}{2}\ln(3+2\sin x) + C$ $|3+2\sin x| = 3+2\sin x$

7 $\int \tan x\,dx$

$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$ المتطابقات النسبية

$= \frac{1}{-1}\int \frac{-1\times\sin x}{\cos x}\,dx$ بالضرب في -1، والقسمة على -1

$= -\ln|\cos x| + C$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

8 $\int \sec x\,dx$

$\int \sec x\,dx = \int \sec x \times \frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$ بالضرب في $\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$

$= \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}\,dx$ باستعمال خاصية التوزيع

$= \ln|\sec x+\tan x| + C$ تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

أتعلّم

ألاحِظ أنَّ البسط $(2x)$ هو مشتقة المقام: $\frac{d}{dx}(x^2-1) = 2x$.

أتعلّم

بما أنَّ البسط $(6x)$ هو أحد مضاعفات مشتقة المقام: $(\frac{d}{dx}(x^2+9) = 2x)$، فإنَّني أُعيد كتابة $\frac{6x}{x^2+9}$ في صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$.

أفكّر

ما مُسوِّغ عملية الضرب في 2، وعملية القسمة على 2؟

أفكّر

هل يُمكِن كتابة هذه النتيجة في صورة أُخرى؟

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أتحقق من فهمي أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

a) $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$

$$\int (\sin x - \frac{5}{x})\, dx = -\cos x - 5\ln|x| + C$$

b) $\int \frac{5}{3x+2}\, dx$

$$\int \frac{5}{3x+2}\, dx = \frac{5}{3}\int \frac{3}{3x+2}\, dx = \frac{5}{3}\ln|3x+2| + C$$

c) $\int \frac{x^2-7x+2}{x^2}\, dx$

$$\int \frac{x^2-7x+2}{x^2}\, dx = \int (1 - \frac{7}{x} + 2x^{-2})\, dx = x - 7\ln|x| - 2x^{-1} + C$$

d) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\, dx$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\, dx = \ln|x^2+3x| + C$$

e) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\, dx$

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\, dx &= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\sin 2x}{1+\cos 2x}\, dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln|1+\cos 2x| + C \\ &= -\frac{1}{2}\ln(1+\cos 2x) + C\end{aligned}$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

f) $\int \cot x \, dx$

$$\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C$$

g) $\int \frac{e^x}{e^x + 7} \, dx$

$$\int \frac{e^x}{e^x + 7} \, dx = \ln |e^x + 7| + C = \ln (e^x + 7) + C$$

h) $\int \csc x \, dx$

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \left(\frac{1}{1 + \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x}\right) dx$$
$$= \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \, dx$$
$$= \int (\csc^2 x - \cot x \csc x) \, dx$$
$$= -\cot x + \csc x + C$$

أتذكَّر

الاقترانات النسبية هي اقترانات يُمكِن كتابتها في صورة نسبة بين كثيري حدود: $\frac{f(x)}{g(x)}$، حيث: $g(x) \neq 0$.

يتطلَّب إيجاد تكاملات بعض الاقترانات النسبية أحيانًا إعادة كتابة المُكامَل بصورة أُخرى باستعمال القسمة، في حال كانت درجة البسط أعلى من (أو تساوي) درجة المقام. وقد ينتج من صورة الاقتران الجديدة تكاملٌ ينتج منه اقتران لوغاريتمي طبيعي.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

مثال 5

أجد: $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$

بما أنَّ المُكامَل اقتران نسبي، درجة البسط فيه أعلى من درجة المقام، فإنَّني سأُعيد كتابته بصورة أُخرى باستعمال القسمة.

الخطوة 1: أقسِم البسط على المقام.

$\times$	x^2	x	2	
x	x^3	x^2	$2x$	2
-1	$-x^2$	$-x$	-2	

الخطوة 2: أُعيد كتابة المُكامَل باستعمال نتيجة القسمة.

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx$$

$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

تكامل اقتران القوَّة، وتكامل المضروب في ثابت $\frac{1}{ax+b}$

أتذكَّر

إذا كان $\frac{f(x)}{g(x)}$ اقترانًا نسبيًّا فيه درجة $f(x)$ أكبر من (أو تساوي) درجة $g(x)$، وكان ناتج القسمة $q(x)$، وباقي القسمة $r(x)$، فإنَّ: $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$.

أتذكَّر

يُمكِنني أيضًا استعمال القسمة الطويلة لقسمة البسط على المقام.

أتحقَّق من فهمي

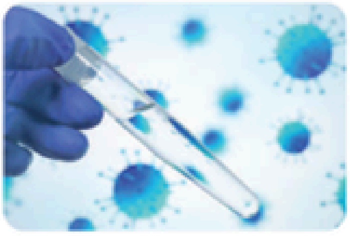
أجد: $\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx$.

$$\int \frac{x^2+x+1}{x+1}\,dx = \int \left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x+1| + C$$

تطبيقات التكامل: الشرط الأوَّلي

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الشرط الأوَّلي هو نقطة تُحقِّق الاقتران الأصلي، ويُمكِن بتعويضها إيجاد قيمة ثابت التكامل C، ويُمكِن بها أيضًا إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة، علمًا بأنَّ الشرط الأوَّلي يُستعمَل كثيرًا لتحديد اقترانات تُنمذِج مواقف علمية وحياتية.

مثال 7: من الحياة



تلوُّث: يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل مليلتر من الماء، بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل مليلتر.

الخطوة 1: أجد تكامل الاقتران: $N'(t)$.

$$N(t) = \int -\frac{2000t}{1+t^2}\, dt \qquad N(t) = \int N'(t)\,dt$$

$$= -1000 \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt \qquad \text{بالضرب في 2، والقسمة على 2}$$

$$= -1000 \ln |1 + t^2| + C \qquad \text{تكامل } \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$= -1000 \ln (1 + t^2) + C \qquad |1+t^2| = 1+t^2$$

الخطوة 2: أجد ثابت التكامل C.

$$N(t) = -1000 \ln (1 + t^2) + C \qquad \text{قاعدة الاقتران}$$

$$5000 = -1000 \ln (1 + (0)^2) + C \qquad \text{بتعويض } t=0,\ N(0) = 5000$$

$$5000 = C \qquad \text{بالتبسيط}$$

إذن، اقتران عدد الخلايا البكتيرية لكل مليلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد هو:

$N(t) = -1000 \ln (1 + t^2) + 5000$.

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أتحقّق من فهمي

تلوُّث: تسرَّب نفط من ناقلة بحرية، مُكوِّنًا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، نصف قُطْرها $R(t)$ قدمًا بعد t دقيقة من بَدْء التسرُّب. إذا كان نصف قُطْر الدائرة يزداد بمُعدَّل: $R'(t) = \frac{21}{0.07t+5}$، فأجد $R(t)$، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

$$R(t) = \int \frac{21}{0.07t+5}\, dt$$

$$= \frac{21}{0.07} \int \frac{0.07}{0.07t+5}\, dt = 300 ln\, |0.07t+5| + C$$

$$R(0) = 300 ln\, 5 + C$$

$$0 = 300 ln\, 5 + C \Rightarrow C = -300 ln\, 5$$

$$R(t) = 300 ln\, |0.07t+5| - 300 ln\, 5 = 300 ln\, |\frac{0.07t+5}{5}|$$

$$= 300 ln\, |0.014t+1|$$

تطبيقات التكامل: الحركة في مسار مستقيم

من التطبيقات المُهِمَّة على الشرط الأوَّلي، إيجاد موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم إذا عُلِم اقتران السرعة، وعُلِم شرط أوَّلي عن موقع الجسم.

يُطلَق على التغيُّر في موقع الجسم اسم **الإزاحة** (displacement). فإذا كان $s(t)$ موقع جسم عند الزمن t، فإنَّ الإزاحة على الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي: $s(t_2) - s(t_1)$، وقد تكون قيمتها موجبةً، أو سالبةً، أو صفرًا، تبعًا لاتجاه حركة الجسم.

يُستعمَل التكامل المحدود لإيجاد إزاحة جسم، عُلِمت سرعته، على النحو الآتي:

مفهوم أساسي — **الإزاحة**

إذا تحرَّك جسم في مسار مستقيم وَفق اقتران الموقع $s(t)$، فإنَّ سرعته هي: $v(t) = s'(t)$، وإزاحته في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي:

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أمّا إذا كان المطلوب إيجاد المسافة الكلية التي قطعها جسم خلال فترة زمنية فيجب تحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها $v(t) \leq 0$ (يتحرّك الجسم إلى الجهة السالبة)، وتحديد الفترات الزمنية الجزئية التي تكون عندها $v(t) \geq 0$ (يتحرّك الجسم إلى الجهة الموجبة). وفي كلتا الحالتين، تُحسَب المسافة الكلية بإيجاد تكامل اقتران السرعة القياسية $|v(t)|$ على النحو الآتي:

أتعلّم

المسافة هي طول المسار الذي يقطعه الجسم بصرف النظر عن الاتجاه، وقيمتها أكبر من (أو تساوي) الصفر. أمّا الإزاحة فهي التغيُّر في الموقع.

مفهوم أساسي — **المسافة الكلية المقطوعة**

إذا تحرَّك جسم في مسار مستقيم وَفق اقتران الموقع $s(t)$، فإنَّ سرعته هي: $v(t) = s'(t)$، والمسافة الكلية (d) التي قطعها في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي:

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$$

مثال 8

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \sin t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

1 **إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة.**

أتذكّر

اقتران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السرعة، واقتران السرعة هو اقتران أصلي لاقتران التسارع.

بما أنَّ اقتران الموقع هو اقتران أصلي لاقتران السرعة، فإنَّه يُمكِن إيجاد موقع الجُسَيْم بعد t ثانية عن طريق التكامل. وبما أنَّ المطلوب هو إيجاد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة، فإنَّه يتعيَّن إيجاد تكامل: $v(t) = \sin t$.

الخطوة 1: أجد اقتران الموقع.

$$s(t) = \int v(t)\, dt \quad \text{بإيجاد تكامل اقتران السرعة}$$

$$= \int \sin t\, dt \quad \text{بتعويض } v(t) = \sin t$$

$$= -\cos t + C_1 \quad \text{تكامل } \sin t$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

الخطوة 2: أجد قيمة ثابت التكامل C_1.

بما أنَّ الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو نقطة الأصل، فإنَّ $s(0) = 0$، وهذا يُعَدُّ شرطًا أوَّليًّا لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1:

اقتران الموقع	$s(t) = -\cos t + C_1$
بتعويض $t = 0, s(0) = 0$	$0 = -\cos(0) + C_1$
بحلِّ المعادلة	$C_1 = 1$

إذن، اقتران الموقع بعد t ثانية من بَدْء الحركة هو: $s(t) = -\cos t + 1$.

الخطوة 3: أجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة.

اقتران الموقع	$s(t) = -\cos t + 1$
بتعويض $t = \frac{\pi}{3}$	$s\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$
بالتبسيط	$= \frac{1}{2}$

إذن، موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{3}$ ثانية من بَدْء الحركة هو $\frac{1}{2}$ m

أتعلّم

القيمة الموجبة للإزاحة تعني أنَّ الموقع النهائي للجُسَيْم يقع في الجهة الموجبة بالنسبة إلى الموقع الابتدائي، والقيمة السالبة للإزاحة تعني أنَّ الموقع النهائي للجُسَيْم يقع في الجهة السالبة بالنسبة إلى الموقع الابتدائي. أمّا الصفر فيعني عدم وجود إزاحة.

2 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$.

صيغة الإزاحة	$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$
بتعويض $v(t) = \sin t, t_1 = 0, t_2 = 3\pi$	$s(3\pi) - s(0) = \int_0^{3\pi} \sin t\, dt$
تكامل $\sin t$	$= -\cos t \Big\|_0^{3\pi}$
بالتعويض	$= -(\cos(3\pi) - \cos(0))$
بالتبسيط	$= 2$

إذن، إزاحة الجُسَيْم هي 2 m

3 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$.

الخطوة 1: أدرس إشارة السرعة.

أجد أصفار اقتران السرعة بمساواة هذا الاقتران بالصفر:

اقتران السرعة	$v(t) = \sin t$
بمساواة اقتران السرعة بالصفر	$\sin t = 0$
بحلِّ المعادلة لـ t في الفترة $[0, 3\pi]$	$t = 0 \quad t = \pi \quad t = 2\pi \quad t = 3\pi$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أدرس إشارة اقتران السرعة حول أصفاره في الفترة المعطاة.

إشارة $v(t)$ +++++ ----- +++++

t 0 π 2π 3π

الخطوة 2: أُكامِل اقتران السرعة القياسية على الفترة $[0, 3\pi]$.

تكامل اقتران السرعة القياسية

$$d = \int_0^{3\pi} |v(t)|dt = \int_0^{\pi} v(t)dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-v(t))dt + \int_{2\pi}^{3\pi} v(t)dt$$

بتعويض $v(t) = \sin t$

$$= \int_0^{\pi} \sin t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin t)dt + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t\, dt$$

تكامل $\sin t$

$$= (-\cos t)\Big|_0^{\pi} + \cos t\,\Big|_{\pi}^{2\pi} + (-\cos t)\Big|_{2\pi}^{3\pi}$$

بالتبسيط

$$= 2 + 2 + 2 = 6$$

إذن، المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3\pi]$ هي 6 m.

أتذكّر

أعيد تعريف اقتران السرعة القياسية وَفقًا لإشارة السرعة.

أتحقّق من فهمي

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 3\cos t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

a) إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بَدْء الحركة.

$$s(t) = \int v(t)\, dt = \int 3\cos t\, dt = 3\sin t + C$$
$$s(0) = 3\sin 0 + C$$
$$0 = 3\sin 0 + C \Rightarrow C = 0$$
$$s(t) = 3\sin t$$
$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.5\,\text{m}$$

b) أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

$$s(2\pi) - s(0) = 3\sin(2\pi) - 3\sin(0) = 0\ \text{m}$$

أتحقّق من فهمي

يتحرَّك جُسَــيْم في مسار مستقيم، وتعطى ســـرعته بالاقتران: $v(t) = 3\cos t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

a) إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقع الجُسَيْم بعد $\frac{\pi}{6}$ ثانية من بَدْء الحركة.

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int 3\cos t\,dt = 3\sin t + C$$
$$s(0) = 3\sin 0 + C$$
$$0 = 3\sin 0 + C \Rightarrow C = 0$$
$$s(t) = 3\sin t$$
$$s\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.5\,\text{m}$$

b) أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

$$s(2\pi) - s(0) = 3\sin(2\pi) - 3\sin(0) = 0\,\text{m}$$

c) أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 2\pi]$.

$$|v(t)| = |3\cos t| = \begin{cases} 3\cos t, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ -3\cos t, & \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2} \\ 3\cos t, & \frac{3\pi}{2} < t \le 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} |v(t)|\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -3\cos t\,dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 3\cos t\,dx$$

$$= 3\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\sin t\Big|_{\frac{\pi\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + 3\sin t\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= (3-0) - (-3-3) + (0-(-3)) = 12m$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

أتدرّب وأحُلّ المسائل

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1) $\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})\, dx$

$$\int (e^{2x-3} - \sqrt{x})\, dx = \int (e^{2x-3} - x^{1/2})\, dx = \frac{1}{2}e^{2x-3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

2) $\int \left(e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}}\right) dx$

$$\int (e^{0.5x} - \frac{3}{e^{0.5x}})\, dx = \int (e^{0.5x} - 3e^{-0.5x})\, dx = 2e^{0.5x} + 6e^{-0.5x} + C$$

3) $\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)\, dx$

$$\int (4\sin 5x - 5\cos 4x)\, dx = -\frac{4}{5}\cos 5x - \frac{5}{4}\sin 4x + C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

4 $\int \left(3 \sec x \tan x - \frac{2}{5x}\right) dx$

$$\int (3\sec x \tan x - \frac{2}{5x})\, dx = 3\sec x - \frac{2}{5}\ln|x| + C$$

5 $\int \left(\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}}\right)^2 dx$

$$\int (\sqrt{e^x} - \frac{1}{\sqrt{e^x}})^2\, dx = \int (e^x - 2 + \frac{1}{e^x})\, dx$$
$$= \int (e^x - 2 + e^{-x})\, dx$$
$$= e^x - 2x - e^{-x} + C$$

6 $\int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2)\, dx$

$$\int (\sin(5-3x) + 2 + 4x^2)\, dx = \frac{1}{3}\cos(5-3x) + 2x + \frac{4}{3}x^3 + C$$

7 $\int (e^x + 1)^2\, dx$

$$\int (e^x + 1)^2 \tan = \int (e^{2x} + 2e^x + 1)\, dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$$

8 $\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x))dx$

$$\int (e^{4-x} + \sin(4-x) + \cos(4-x))dx$$
$$= -e^{4-x} + \cos(4-x) - \sin(4-x) + C$$

0799819016 أ.أحمد محمد البشايرة

9 $\int \frac{x^2-6}{2x}dx$

$$\int \frac{x^2-6}{2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{x}\right)\,dx$$
$$= \frac{1}{4}x^2 - 3\ln|x| + C$$

10 $\int \left(3\csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}\right)dx$

$$\int \left(3\csc^2(3x+2) + \frac{5}{x}\right)\,dx = -\cot(3x+2) + 5\ln|x| + C$$

11 $\int \frac{e^x+1}{e^x}dx$

$$\int \frac{e^x+1}{e^x}\,dx = \int (1+e^{-x})\,dx = x - e^{-x} + C$$

12 $\int \frac{e^x}{e^x+4}dx$

$$\int \frac{e^x}{e^x+4}\,dx = \ln|e^x+4| + C = \ln(e^x+4) + C$$

13 $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x + 4}dx$

$$\int \frac{\cos 2x}{\sin x\cos x + 4}\,dx = \int \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2}\sin 2x + 4}\,dx$$
$$= \ln\left|\frac{1}{2}\sin 2x + 4\right| + C = \ln\left(\frac{1}{2}\sin 2x + 4\right) + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

14 $\int \frac{dx}{5-\frac{x}{3}}$

$$\int \frac{dx}{5-\frac{x}{3}} = -3\int \frac{-\frac{1}{3}}{5-\frac{x}{3}}\,dx$$

$$= -3 \ln\left|5-\frac{x}{3}\right| + C$$

15 $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$

$$\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{1}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x + \tan x \sec x)\,dx$$

$$= \tan x + \sec x + C$$

16 $\int \sec^2 x\,(1+e^x \cos^2 x)\,dx$

$$\int \sec^2 x\,(1+e^x\cos^2 x)\,dx = \int (\sec^2 x + e^x)\,dx$$

$$= \tan x + e^x + C$$

17 $\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx$

$$\int \left(\frac{2}{x} - 2^x\right) dx = 2\ln|x| - \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

18 $\int \sin 3x \cos 2x\,dx$

$$\int \sin 3x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x - \frac{1}{2}\cos x + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

19 $\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1}\,dx$

$$\int \frac{2x+3}{3x^2+9x-1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+9}{3x^2+9x-1}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\ln|3x^2+9x-1| + C$$

20 $\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$
$$= \int \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$
$$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

21 $\int \left(\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} + (\sin^2 x \csc x)\right)dx$

$$\int \left(\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} + \sin^2 x \csc x\right)dx = \int (\csc^2 x + \cot x \csc x + \sin x)\,dx$$
$$= -\cot x - \csc x - \cos x + C$$

22 $\int (\sec x + \tan x)^2\,dx$

$$\int (\sec x + \tan x)^2 dx = \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x)\,dx$$
$$= \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \int (2\sec^2 x + 2\sec x \tan x - 1)\,dx$$
$$= 2\tan x + 2\sec x - x + C$$

23 $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$

24 $\int \frac{x^2}{x^3 - 3} dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3 - 3} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3 - 3} dx = \frac{1}{3}\ln|x^3 - 3| + C$$

25 $\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x \cos x)\, dx$

$$\begin{aligned}
&\int (9\cos^2 x - \sin^2 x - 6\sin x\cos x)dx \\
&= \int (9\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - 6\sin x\cos x)dx \\
&= \int (10\cos^2 x - 1 - 6\sin x\cos x)dx \\
&= \int (10(\frac{1 + \cos 2x}{2}) - 1 - 3\sin 2x)dx \\
&= \int (5 + 5\cos 2x - 1 - 3\sin 2x)dx = \int (4 + 5\cos 2x - 3\sin 2x)dx \\
&= 4x + \frac{5}{2}\sin 2x + \frac{3}{2}\cos 2x + C
\end{aligned}$$

26 $\int (\cos^4 x - \sin^4 x)dx$

$$\begin{aligned}
\int (\cos^4 x - \sin^4 x)dx &= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)dx \\
&= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)dx \\
&= \int \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{2}\sin 2x + C
\end{aligned}$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

27 $\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x \, dx$

$$\int_0^{\pi} 2\cos\frac{1}{2}x dx = 4\sin\frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi} = 4(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = 4$$

28 $\int_0^{2\pi} |\sin x| \, dx$

$$|sinx| = \begin{cases} sinx, 0 \le x \le \pi \\ -sinx, \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} |sinx| dx = \int_0^{\pi} sinxdx + \int_{\pi}^{2\pi} -sinxdx$$

$$= -cosx|_0^{\pi} + cosx|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -(cos\pi - cos0) + cos2\pi - cos\pi$$

$$= -(-2) + 1 - (-1) = 4$$

29 $\int_1^{e} \frac{8x}{x^2+1} dx$

$$\int_1^{e} \frac{8x}{x^2+1} dx = 4\int_1^{e} \frac{2x}{x^2+1} dx$$

$$= 4\ln|x^2+1||_1^{e}$$

$$= 4\ln(e^2+1) - 4\ln 2$$

$$= 4\ln(\frac{e^2+1}{2})$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

30 $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cos x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin3x\cos x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin4x + \sin2x) dx$$

$$= (-\frac{1}{8}\cos4x - \frac{1}{4}\cos2x)|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{6} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi}{6} - (-\frac{1}{8}\cos0 - \frac{1}{4}\cos0)$$

$$= \frac{5}{16}$$

31 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x} dx$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{1+\cot^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x}{\csc^2 x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 \csc^2 x} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x(\frac{1}{\sin^2 x})} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x dx$$

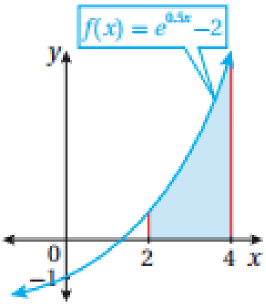
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos2x) dx$$

$$= \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin2x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{3} - (\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{4})$$

32 $\int_0^3 (x - 5^x) \, dx$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة



33 أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة بين المحور x ومنحنى الاقتران: $f(x) = e^{0.5x} - 2$ المُمثَّل في الشكل المجاور.

$$A = \int_2^4 (e^{0.5x} - 2)dx = (2e^{0.5x} - 2x)|_2^4$$
$$= 2e^2 - 8 - (2e - 4)$$
$$= 2e^2 - 2e - 4$$

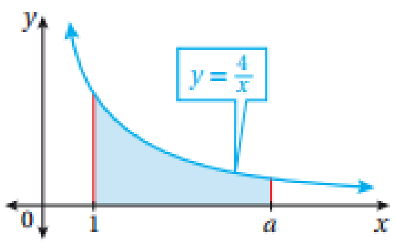
34 إذا كان: $\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x} dx = \ln 12$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

$$\int_a^{3a} \frac{2x+1}{x} dx = \int_a^{3a} 2 + \frac{1}{x} dx$$
$$= (2x + \ln|x|)|_a^{3a}$$
$$= 6a + \ln 3a - 2a - \ln a$$
$$= 4a + \ln 3$$
$$\Rightarrow 4a + \ln 3 = \ln 12$$
$$\Rightarrow 4a = \ln 12 - \ln 3$$
$$4a = \ln \frac{12}{3}$$
$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}\ln 4$$

35 أثبِت أنَّ: $\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \ln\sqrt{2}$ ، حيث: $a \neq 0$.

$$\int_0^a \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{x^2+a^2}dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\Big|_0^a$$
$$= \frac{1}{2}(\ln(2a^2) - \ln(a^2)) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$$

36 يُبيِّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{4}{x}$. إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 1$، و $x = a$، هي 10 وحدات مُربَّعة، فأجد قيمة الثابت a.



$$A = \int_1^a \frac{4}{x}dx = 4\ln|x|\,\Big|_1^a = 4\ln a - 4\ln 1 = 4\ln a$$
$$\Rightarrow 4\ln a = 10 \Rightarrow \ln a = \frac{5}{3} \Rightarrow a = e^{\frac{5}{2}}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

37 إذا كان: $f(x) = \int \cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) dx$، وكان: $f(\pi) = 3$، فأجد $f(0)$.

$$f(x) = \int \cos(\frac{1}{2}x + \pi)dx = 2\sin(\frac{1}{2}x + \pi) + C$$

$$f(\pi) = 2\sin(\frac{1}{2}\pi + \pi) + C$$

$$3 = 2\sin\frac{3\pi}{2} + C$$

$$3 = -2 + C \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = 2\sin(\frac{1}{2}x + \pi) + 5$$

$$\Rightarrow f(0) = 2\sin\pi + 5 = 5$$

38 إذا كان: $y = \int \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) dx$، وكان: $y = 1$ عندما $x = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنّه يُمكِن كتابة y في صورة: $y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$.

$$y = \int \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)dx = \frac{-\cos(\frac{\pi}{2} - 2x)}{-2} + C = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + C$$

$$y|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) + C$$

$$1 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1 + \sin 2x}{2}$$

0799819016 أ.أحمد محمد البشايرة

39 يُمثِّل الاقتران: $\frac{dy}{dx} = e^{2x} - 2e^{-x}$ ميل المماس لمنحنى الاقتران y. أجد قاعدة الاقتران y إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(0, 1)$.

$$y = \int (e^{2x} - 2e^{-x})dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} + C$$

$$y|_{x=0} = \frac{1}{2} + 2 + C$$

$$1 = \frac{5}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^{-x} - \frac{3}{2}$$

40 إذا كان: $\int_{\pi/9}^{\pi} (9 + \sin 3x)\, dx = a\pi + b$، فأجد قيمة الثابتين النسبيين: a، وb.

$$\int_{\frac{\pi}{9}}^{\pi} (9 + \sin 3x)dx = (9x - \frac{1}{3}\cos 3x)\Big|_{\frac{\pi}{9}}^{\pi}$$

$$= 9\pi - \frac{1}{3}\cos 3\pi - \pi + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 8\pi + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$= 8\pi + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 8\pi + \frac{1}{2} = a\pi + b$$

ونظراً لأن a وb نسبيان، فلا يوجد حل لهذه المعادلة سوى أن يكون: $a = 8, b = \frac{1}{2}$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

41 إذا كان: $f'(x) = \tan x$، وكان: $f(3) = 5$، فأُثبِت أنَّ: $f(x) = \ln\left|\frac{\cos 3}{\cos x}\right| + 5$.

42 يُمثِّل الاقتران: $f'(x) = \cos^2 x$ ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$. أجد قاعدة الاقتران f إذا علمْتُ أنَّ منحناه يمرُّ بنقطة الأصل.

$$f(x) = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin 2x) + C$$

$$f(0) = \frac{1}{2}(0 + \frac{1}{2}\sin 0) + C$$

$$0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = e^{-2t}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسَيْم هو $3\ \mathrm{m}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

43 موقع الجُسَيْم بعد t ثانية.

$$s(t) = \int e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} + C$$

$$s(0) = -\frac{1}{2} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$3 = -\frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{7}{2}$$

$$s(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{7}{2}$$

44 موقع الجُسَيْم بعد 100 ثانية.

$$s(100) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-200} + \frac{7}{2} \approx 3.5m$$

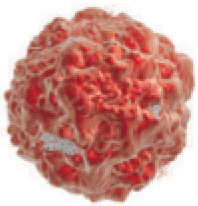
بيئة: في دراسة تناولت أحد أنواع الحيوانات المُهدَّدة بالانقراض في غابة، تَبيَّن أنَّ عدد حيوانات هذا النوع $P(t)$ يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = -0.51e^{-0.03t}$، حيث t الزمن بالسنوات بعد بَدْء الدراسة:

45 أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أيِّ زمن t، علمًا بأنَّ عدد حيوانات هذا النوع عند بَدْء الدراسة هو 500 حيوان.

$$P(t) = \int -0.51e^{-0.03t}dt = \frac{-0.51}{-0.03}e^{-0.03t} + C = 17e^{-0.03t} + C$$
$$P(0) = 17 + C$$
$$500 = 17 + C \Rightarrow C = 483$$
$$P(t) = 17e^{-0.03t} + 483$$

46 أجد عدد الحيوانات بعد 10 سنوات من بَدْء الدراسة، مُقرِّبًا إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$$P(10) = 17e^{-0.3} + 483 \approx 496$$



طب: في تجربة لدواء جديد أُعطِي لمريض لديه ورم حميد، حجمه $30\ cm^3$، تَبيَّن أنَّ حجم الورم بعد t يومًا من بَدْء التجربة يتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = 0.15 - 0.9e^{0.006t}$ مَقيسًا بوحدة (cm^3/day):

47 أجد قاعدة حجم الورم بعد t يومًا من بَدْء التجربة.

$$P(t) = \int (0.15 - 0.9e^{0.006t})dt$$
$$= 0.15t - \frac{0.9}{0.006}e^{0.006t} + C$$
$$= 0.15t - 150e^{0.006t} + C$$
$$P(0) = -150 + C$$
$$30 = -150 + C \Rightarrow C = 180$$
$$P(t) = 0.15t - 150e^{0.006t} + 180$$

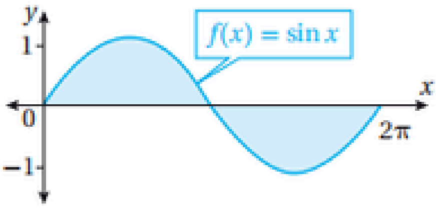
48 أجد حجم الورم بعد 10 أيام من بَدْء التجربة.

$$P(10) = 1.5 - 150e^{0.06} + 180 \approx 22.2cm^3$$

مهارات التفكير العليا

تبرير: أجد مساحة المنطقة المُظلّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين، مُبرِّرًا إجابتي:

52



$$\sin x = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

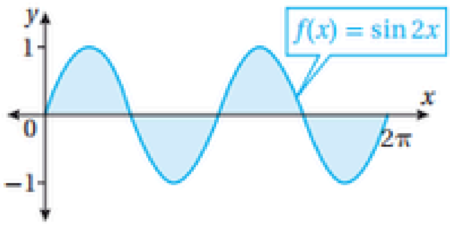
$$A = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left(-\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right) = (-\cos x)|_0^{\pi} + (\cos x)|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$$

ملحوظة: يمكن الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$A = 2\int_0^{\pi} \sin x dx = 2(-\cos x)|_0^{\pi} = 2(-\cos\pi + \cos 0) = 2(2) = 4$$

53



$$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx + \left(-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x dx\right) + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2x dx$$

$$+\left(-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2x dx\right)$$

والأسهل هو الاستفادة من التماثل وإيجاد المساحة المطلوبة كما يأتي:

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -2\cos 2x|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2(-1-1) = 4$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

تحدٍّ: أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

54 $\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\, dx$

$$\int \frac{\sec x}{\sin x - \cos x}\, dx = \int \frac{\frac{\sec x}{\cos x}}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1\right)}\, dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{(\tan x - 1)}\, dx$$

$$= \ln|\tan x - 1| + C$$

55 $\int \frac{\cot x}{2 + \sin x}\, dx$

$$\int \frac{\cot x}{2 + \sin x}\, dx = \int \frac{\cot x \csc x}{2\csc x + 1}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2\cot x \csc x}{2\csc x + 1}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|2\csc x + 1| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|2\csc x + 1| + C$$

56 $\int \frac{1}{x \ln x^3}\, dx$

$$\int \frac{1}{x \ln x^3}\, dx = \int \frac{1}{3x \ln x}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx = \frac{1}{3}\ln|\ln x| + C$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

57 تبرير: إذا كان: $\int_1^a \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x+3}\right) dx = 0.5\ln 5$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a>0$.

$$\int_1^a \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x+3}\right)dx = \left(ln|x|-\frac{1}{2}ln|2x+3|\right)\Big|_1^a$$

$$=\left(lna-\frac{1}{2}ln(2a+3)\right)-\left(-\frac{1}{2}ln5\right)$$

$$=lna-\frac{1}{2}ln(2a+3)+\frac{1}{2}ln5$$

$$=ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}}+\frac{1}{2}ln5$$

$$\Rightarrow ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}}+\frac{1}{2}ln5=0.5ln5$$

$$\Rightarrow ln\frac{a}{\sqrt{2a+3}}=0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2a+3}}=1$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{2a+3}$$

$$\Rightarrow a^2=2a+3$$

$$\Rightarrow a^2-2a-3=0$$

$$\Rightarrow (a-3)(a+1)=0$$

$\Rightarrow a=3, a=-1$ (مرفوضة لأن $a>0$)

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

58 تبرير: أُثبِت بطريقتين مختلفتين أنَّ: $\int_0^{\pi/4} \cos x \cos 3x\, dx - \int_0^{\pi/4} \sin x \sin 3x\, dx = 0$.

طريقة أولى:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 4x + \cos 2x) dx$$

$$= (\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x)|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (\frac{1}{8}\sin \pi + \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}) - (0+0) = \frac{1}{4} \text{..........}(1)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x - \cos 4x) dx$$

$$= (\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x)|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\sin\pi) - (0-0) = \frac{1}{4} \text{...........}(2)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

طريقة ثانية:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x \cos 3x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \sin 3x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+3x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx = \frac{1}{4}\sin 4x|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) = 0$$

59 تبرير: إذا كان: $\int_{\pi/4k}^{\pi/3k} (1 - \pi \sin kx)\, dx = \pi(7 - 6\sqrt{2})$، فأجد قيمة الثابت k، مُبرِّرًا إجابتي.

$$\int_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}} (1 - \pi \sin kx) dx = (x + \frac{\pi}{k}\cos kx)|_{\frac{\pi}{4k}}^{\frac{\pi}{3k}}$$

$$= \frac{\pi}{3k} + \frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4k} - \frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\pi}{k}(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{12k}(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12k}(7 - 6\sqrt{2}) = \pi(7 - 6\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{12}$$

تحدٍّ: يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران:

$$v(t)=\begin{cases}2t+4 & ,0\le t\le 6\\ 20-(t-8)^2 & ,6<t\le 10\end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

60 موقع الجُسَيْم بعد 5 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

$$v(t)=\begin{cases}2t+4, & 0\le t\le 6\\ 16t-t^2-44, & 6<t\le 10\end{cases}$$

$$s(t)=\int v(t)dt$$

$s(t)=\int(2t+4)dt=t^2+4t+C_1$ (عندما $0\le t\le 6$)

$$s(0)=0\Rightarrow C_1=0$$

$$\Rightarrow s(t)=t^2+4t, 0\le t\le 6$$

$$s(5)=25+20=45\text{m}$$

61 موقع الجُسَيْم بعد 9 ثوانٍ من بَدْء الحركة.

$s(t)=\int(16t-t^2-44)dt=8t^2-\frac{1}{3}t^3-44t+C_2$ (عندما $6<t\le 10$)

لإيجاد قيمة C_2 نستعمل موقع الجسم عند $t=6$ موقعاً ابتدائياً بالنسبة للفترة $[6,10]$:

$$s(6)=8(6)^2-\frac{1}{3}(6)^3-44(6)+C_2$$

ونحسب $s(6)$ من اقتران الموقع الذي وجدناه في السؤال السابق بالنسبة للفترة $[0,6]$:

$$s(t)=t^2+4t, 0\le t\le 6$$

$$s(6)=6^2+4(6)=60$$

$$60=8(6)^2-\frac{1}{3}(6)^3-44(6)+C_2$$

$$60=-48+C_2\Rightarrow C_2=108$$

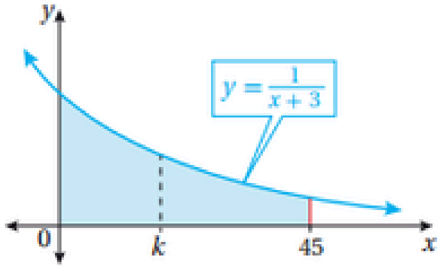
$$\Rightarrow s(t)=8t^2-\frac{1}{3}t^3-44t+108, 6<t\le 10$$

$$s(9)=117\text{m}$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

62 **تحدٍّ**: يُبيِّن الشكل المجاور المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $y = \frac{1}{x+3}$، والمحور x، والمستقيمين: $x = 0$، و $x = 45$.

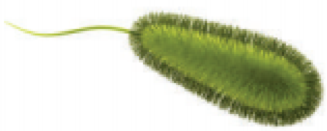
أجد قيمة k التي تقسم المنطقة المُظلَّلة إلى منطقتين متساويتين في المساحة.



$$A = \int_0^{45} \frac{1}{x+3} dx = ln|x+3| \Big|_0^{45}$$
$$= ln48 - ln3 = ln16$$
$$\frac{1}{2}A = \int_0^{k} \frac{1}{x+3} dx = ln|x+3| \Big|_0^{k}$$
$$= ln(k+3) - ln3$$
$$= ln\frac{k+3}{3}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} ln16 = ln\frac{k+3}{3}$$
$$ln16^{1/2} = ln\frac{k+3}{3}$$
$$\Rightarrow 4 = \frac{k+3}{3} \Rightarrow k = 9$$

مسألة اليوم

يُمثِّل الاقتران $P(t)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا من بَدْء دراستها في مجتمع بكتيري. إذا كان عدد هذه الخلايا عند بَدْء الدراسة هو 200000 خلية، فأجد عددها في المجتمع البكتيري بعد 12 يومًا من بَدْء الدراسة، علمًا بأنَّها تتغيَّر بمُعدَّل: $P'(t) = 200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t}$.



$$P(t) = \int (200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t}) dt = \frac{200}{0.1}e^{0.1t} + \frac{150}{-0.03}e^{-0.03t} + C$$
$$= 2000e^{0.1t} - 5000e^{-0.03t} + C$$
$$P(0) = 2000 - 5000 + C$$
$$200000 = -3000 + C \Rightarrow C = 203000$$
$$P(t) = 2000e^{0.1t} - 5000e^{-0.03t} + 203000$$
$$P(12) = 2000e^{1.2} - 5000e^{-0.36} + 203000 \approx 206152$$

إذن سيكون عدد الخلايا بعد 12 يوماً 206152 خلية تقريباً.

أسئلة كتاب التمارين

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية:

1. $\int 4e^{-5x}\,dx$

$$\int 4e^{-5x}\,dx = -\frac{4}{5}e^{-5x} + C$$

2. $\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx$

$$\int (\sin 2x - \cos 2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

3. $\int \cos^2 2x\,dx$

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

4. $\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\,dx$

$$\int \frac{e^x + 4}{e^{2x}}\,dx = \int (e^{-x} + 4e^{-2x})\,dx = -e^{-x} - 2e^{-2x} + C$$

5. $\int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2e^x\right)dx$

$$\int (\cot x \csc x - 2e^x)dx = -\csc x - 2e^x + C$$

6. $\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx$

$$\int (3\cos 3x - \tan^2 x)\,dx = \int \left(3\cos 3x - (\sec^2 x - 1)\right)dx$$
$$= \sin 3x - \tan x + x + C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

7 $\int \cos x\,(1+\csc^2 x)\,dx$

$$\int \cos 3x\,(1+\csc^2 x)\,dx = \int \cos x\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$
$$= \int \cos x + \cot x \csc x\,dx = \sin x - \csc x + C$$

8 $\int \frac{x^2+x-4}{x+2}\,dx$

$$\int \frac{x^2+x-4}{x+2}\,dx = \int \left(x-1-\frac{2}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - x - 2\ln|x+2| + C$$

9 $\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,dx = \int e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = -2e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

10 $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x^2}\right)dx = \int (\sec^2 x + x^{-2})\,dx = \tan x - \frac{1}{x} + C$$

11 $\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx$

$$\int \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|x^3-3x^2| + C$$

12 $\int \ln e^{\cos x}\,dx$

$$\int \ln e^{\cos x}\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016

13 $\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

$$\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin x) + C$$

14 $\int \frac{3}{2x-1} dx$

$$\int \frac{3}{2x-1} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-1} dx = \frac{3}{2}\ln|2x-1| + C$$

15 $\int \frac{3 - 2\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2 \frac{1}{2}x} dx$

$$\int \frac{3 - 2\cos\frac{1}{2}x}{\sin^2\frac{1}{2}x} dx = \int \left(3\csc^2\frac{1}{2}x - 2\cot\frac{1}{2}x\csc\frac{1}{2}x\right) dx$$

$$= -6\cot\frac{1}{2}x + 4\csc\frac{1}{2}x + C$$

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

16 $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 4} dx$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+4} dx = \ln|e^x + 4|\Big|_0^1 = \ln(e+4) - \ln 5 = \ln\frac{e+4}{5}$$

17 $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$

$$\int_1^2 \frac{1}{3x-2} dx = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{3}{3x-2} dx = \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_1^2 = \frac{1}{3}\ln 4 - 0 = \frac{1}{3}\ln 4$$

18 $\int_0^{\pi/3} \sin x \cos x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

19 $\int_0^{\pi/4} (\cos x + 3\sin x)^2 \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x + 3\sin x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + 6\sin x \cos x + 9\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin^2 x + 6\sin x \cos x + 9\sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 8\sin^2 x + 3\sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 4(1 - \cos 2x) + 3\sin 2x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (5 - 4\cos 2x + 3\sin 2x)dx = \left(5x - 2\sin 2x - \frac{3}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\pi - 2}{4}$$

20 $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\frac{1}{\sqrt{2}} - 0 = \frac{1}{2}\ln 2$$

21 $\int_0^{\pi/16} (\cos^2 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x) \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - 4\sin^2 x \cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - (2\sin x \cos x)^2)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{16}} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x \, dx = \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{16}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

22 $\int_0^{\pi/4} \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x \sec x + \tan^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x + 2\tan x \sec x + \sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sec^2 x + 2\tan x \sec x - 1) dx$$

$$= (2\tan x + 2\sec x - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 + 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2 = 2\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$$

23 $\int_0^1 \frac{6x}{3x+2}\, dx$

$$\int_0^1 \frac{6x}{3x+2} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{4}{3x+2}\right) dx = \left(2x - \frac{4}{3}\ln|3x+2|\right)\Big|_0^1$$

$$= 2 - \frac{4}{3}\ln 5 + \frac{4}{3}\ln 2 = 2 + \frac{4}{3}\ln\frac{2}{5}$$

0799819016
أ.أحمد محمد البشايرة

24 إذا كان: $\int_1^k \frac{4}{2x-1}\,dx = 1$، فأجد قيمة الثابت k، حيث: $k > \frac{1}{2}$.

$$\int_1^k \frac{4}{2x-1}dx = 1$$

$$\Rightarrow 2\ln|2x-1|\,|_1^k = 1$$

$$\Rightarrow 2\ln|2k-1| = 1$$

$$\Rightarrow 2\ln(2k-1) = 1$$

$$\Rightarrow \ln(2k-1) = \frac{1}{2} \qquad ,k > \frac{1}{2}$$ لأن

$$\Rightarrow 2k-1 = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow k = \frac{e^{\frac{1}{2}}+1}{2}$$

25 إذا كان: $\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})\,dx = \frac{48}{7}$، فأجد قيمة الثابت a، حيث: $a > 0$.

$$\int_0^{\ln a} (e^x + e^{-x})dx = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow (e^x - e^{-x})|_0^{\ln a} = \frac{48}{7}$$

$$\Rightarrow \left(a - \frac{1}{a}\right) - (1-1) = \frac{48}{7}$$

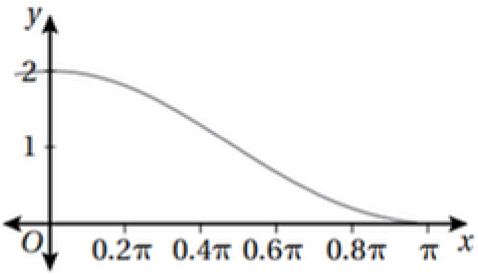
$$\Rightarrow a - \frac{1}{a} - \frac{48}{7} = 0$$

$$\Rightarrow 7a^2 - 48a - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (7a+1)(a-7) = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{7}(\text{تُرفض}) \quad , \quad a = 7$$

أ.أحمد محمد البشايرة
0799819016



26 يُبيِّن الشكل المجاور جزءًا من منحنى الاقتران: $f(x) = 2\cos^2 0.5x$.
أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحورين الإحداثيين الموجبين.

$$A = \int_0^{\pi} 2\cos^2 \frac{1}{2}x\,dx = \int_0^{\pi} (1+\cos x)dx = (x+\sin x)|_0^{\pi} = \pi$$

في كلٍّ ممّا يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

27 $f'(x) = e^{-x} + x^2 \,;\, (0, 4)$

$$f(x) = \int (e^{-x} + x^2)dx = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$f(0) = -1 + C$$

$$4 = -1 + C \Rightarrow C = 5$$

$$\Rightarrow f(x) = -e^{-x} + \frac{1}{3}x^3 + 5$$

28 $f'(x) = \frac{3}{x} - 4 \,;\, (1, 0)$

$$f(x) = \int \left(\frac{3}{x} - 4\right) dx = 3\ln|x| - 4x + C$$

$$f(x) = 3\ln|x| - 4x + C$$

$$f(1) = -4 + C$$

$$0 = -4 + C \Rightarrow C = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 3\ln|x| - 4x + 4$$

يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = \frac{-t}{1+t^2}$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

29 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, 3]$.

$$s(3) - s(0) = \int_0^3 v(t)\, dt = \int_0^3 \frac{-t}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^3 = -\frac{1}{2}\ln 10 \text{ m}$$

30 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, 3]$.

$$d = \int_0^3 |v(t)|\, dt = \int_0^3 \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^3 = \frac{1}{2}\ln 10 \text{ m}$$

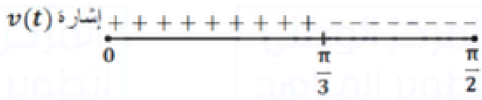
يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران: $v(t) = 6\sin 3t$، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته بالمتر لكل ثانية:

31 أجد إزاحة الجُسَيْم في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) - s(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} v(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6\sin 3t\, dt = -2\cos 3t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \text{ m}$$

32 أجد المسافة الكلية التي قطعها الجُسَيْم في الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$6\sin 3t = 0 \Rightarrow 3t = 0, \pi \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{3}$$



$$d = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |v(t)|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |6\sin 3t| dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 6\sin 3t\, dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -6\sin 3t\, dt$$

$$= -2\cos 3t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + 2\cos 3t\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 + 2 + 0 - 2(-1) = 6 \text{ m}$$

33 يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته بالاقتران:

$$v(t)=\begin{cases}8t-t^2 & ,0\le t\le 6\\ 15-\frac{1}{2}t & ,t>6\end{cases}$$

حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته بالمتر لكل ثانية. إذا انطلق الجُسَيْم من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 40 ثانية من بَدْء الحركة.

عندما $0\le t\le 6$

$$s(t)=\int(8t-t^2)dt=4t^2-\frac{1}{3}t^3+C_1$$

$$s(0)=0-0+C_1$$

$$0=0+C_1\Rightarrow C_1=0$$

$$\Rightarrow s(t)=4t^2-\frac{1}{3}t^3 \quad ,0\le t\le 6$$

عندما $t>6$

$$s(t)=\int\left(15-\frac{1}{2}t\right)dt=15t-\frac{1}{4}t^2+C_2$$

الموقع الابتدائي للجسيم في هذه الفترة هو موقعه في نهاية الفترة الأولى أي $s(6)$

نحسب $s(6)$ من قاعدة الموقع السابقة $s(6)=144-\frac{216}{3}=72$

$$s(6)=90-9+C_2$$

$$72=81+C_2\Rightarrow C_2=-9$$

$$\Rightarrow s(t)=15t-\frac{1}{4}t^2-9 \quad ,t>6$$

$$\Rightarrow s(40)=15(40)-\frac{1}{4}(1600)-9=191\text{ m}$$

يُعرض فيما يلي حل لهذا السؤال بطريقة أخرى.

حل آخر:

$$s(40)-s(0)=\int_0^{40}v(t)dt$$

$$\Rightarrow s(40)=s(0)+\int_0^{40}v(t)dt$$

$$=0+\int_0^{6}(8t-t^2)dt+\int_6^{40}\left(15-\frac{1}{2}t\right)dt$$

$$=(4t^2-\frac{t^3}{3})\Big|_0^6+(15t-\frac{t^2}{4})\Big|_6^{40}$$

$$=\left(4(6^2)-\frac{6^3}{3}\right)-0+15(40)-\frac{40^2}{4}-15(6)+\frac{6^2}{4}$$

$$=144-72+600-400-90+9=191\text{ m}$$